





THE LIBRARY OF
YORK
UNIVERSITY



3 9007 0396 4761 5

Date Due

Date Due			
STEACIE	AUG 8	1977	
STEACIE	AUG	3 1977	
	JUN 20	1995 SC FAC9	
FORM 108			



Digitized by the Internet Archive
in 2014

https://archive.org/details/introductionanaly00eule_0

IMPRESSION ANASTALTIQUE
CULTURE ET CIVILISATION
115, AVENUE GABRIEL LEBON
BRUXELLES

1967

INTRODUCTIO
IN ANALYSIN
INFINITORUM.

AUCTORE

LEONHARDO EULERO,
Professore Regio BEROLINENSI, & Academia Im-
perialis Scientiarum PETROPOLITANÆ
Socio.

TOMUS SECUNDUS.



LAUSANNÆ,
Apud MARCUM-MICHAELEM BOUSQUET & Socios.

MDCCLXVIII

QA
35
EST
1748a
+2
Steacie

INTERNATIONAL
MUSEUM OF NATURAL HISTORY
WASHINGTON, D. C.
DEPARTMENT OF GEOLOGY
AND MINERALOGY
UNITED STATES GEOLOGICAL SURVEY
WASHINGTON, D. C.

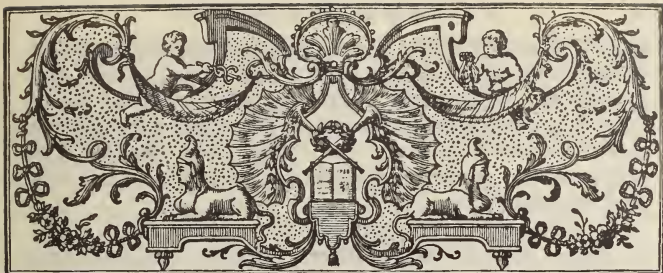


U.S. GOVERNMENT PRINTING OFFICE
1960 O - 348-000

INTRODUCTIO
I N
ANALYSIN INFINITORUM.
LIBER SECUNDUS,

Continens

Theoriam Linearum curvarum , una cum appen-
dice de Superficiebus.

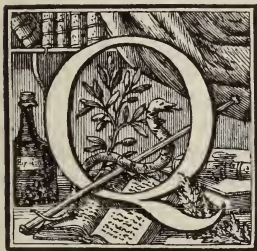


LIBER SECUNDUS.

C A P U T I.

De lineis curvis in genere.

1.



Uoniam quantitas variabilis est magnitudo in genere considerata omnes quantitates determinatas in se complectens, in Geometria hujusmodi quantitas variabilis convenientissime repræsentabitur per lineam rectam indefinitam *RS*. Cum enim in linea indefinita magnitudinem quamcunque determinatam abscindere liceat, ea

T A B. I.
Fig. I.

pariter ac quantitas variabilis eandem quantitatis ideam menti offert. Primum igitur, in linea indefinita *RS* punctum assumi debet *A*, unde magnitudines determinatæ abscindendæ initium sumere censeantur; sicque portio determinata *AP* repræsentabit valorem determinatum in quantitate variabili comprehensum.

2. Sit igitur x quantitas variabilis, quæ per rectam indefinitam

A 2

nitam

LIB. II. nitam RS repræsentetur, atque manifestum est omnes valores determinatos ipsius x , qui quidem sint reales, per portiones in recta RS abscindendas repræsentari posse. Scilicet, si punctum P in ipso puncto A capiatur, intervallum AP evanescens exhibebit valorem $x = 0$; quo magis autem punctum P ab A removetur, eo major valor determinatus ipsius x intervallo AP repræsentabitur.

Vocantur autem hæc intervalla AP , **ABSCISSÆ**.

Atque ideo Abscissæ exhibent variabilis x valores determinatos.

3. Quia vero recta RS indefinita utrinque ab A in infinitum excurrit, utrinque etiam omnes ipsius x valores abscindi poterunt. Quod si autem valores affirmativos ipsius x ab A dextrorsum progrediendo abscindamus, intervalla Ap sinistrorsum abscissa valores ipsius x negativos exhibebunt. Cum enim, quo longius punctum P dextrorsum ab A distat, intervallum AP eo majorem valorem ipsius x significet; sic vicissim, quo magis punctum P sinistrorsum removetur, eo magis valor ipsius x diminuetur; atque, si P ad A perveniat, omnino fiet $x = 0$. Hanc ob rem si P ulterius sinistrorsum removeatur, valores ipsius x nihilo minores, hoc est negativi, denotabuntur, atque ideo intervalla Ap ab A sinistrorsum abscissa valores ipsius x negativos exhibebunt, si quidem intervalla AP dextrorsum sumta valores affirmativos præbere censeantur. Arbitrarium autem est utra plaga ad valores affirmativos ipsius x designandos eligatur: semper enim opposita valores ipsius x negativos continebit.

T A B. I. 4. Cum igitur linea recta indefinita quantitatem variabilem
Fig. 2. x exhibeat, videamus quomodo Functio ipsius x quæcunque quam commodissime geometricè repræsentari queat. Sit y Functio quæcunque ipsius x ; quæ ergo valorem determinatum induat, si pro x valor determinatus substituatur. Sumta recta indefinita RAS ad valores ipsius x denotandos, cui libet valori ipsius x determinato AP normaliter applicetur recta PM valori ipsius y respondenti æqualis. Scilicet, si
valor

valor ipsius y prodeat affirmativus, is supra rectam RS constituitur, sin autem valor ipsius y negativus oriatur, is infra rectam RS normaliter applicetur. Sumtis enim valoribus ipsius y affirmativis supra rectam RS , evanescentes in ipsam RS & negativi infra eam cadent.

5. Figura ergo ejusmodi Functionem ipsius x , pro y exhibet, quæ, posito $x = 0$, induat valorem affirmativum $= AB$, sin capiatur $x = AP$, fit $y = PM$; si $x = AD$, fit $y = 0$, & si sumatur $x = AP$, Functio y accipit valorem negativum, ideoque normaliter applicata PM infra rectam RS cadit. Simili modo valores ipsius y , qui valoribus negativis ipsius x respondent, repræsentantur per applicatas supra RS positas, si sint affirmativi; contra autem infra rectam RS constitui debent, ut pm : sin autem, pro quopiam ipsius x valore, ut $x = AE$, fiat $y = 0$, tum ibi longitudo Applicatæ evanescit.

6. Si igitur hoc modo pro omnibus valoribus determinatis ipsius x definiantur valores ipsius y respondentes, ad singula rectæ RS puncta P constituentur rectæ normaliter applicatæ PM valores Functionis y exprimentes, harumque Applicatarum PM alteri termini P in rectam RS incident, alteri vero M vel supra RS erunt positi, si valores ipsius y fuerint affirmativi; vel infra, si sint negativi; vel etiam in ipsam rectam RS incident, si evanescant, uti evenit in punctis D & E . Singulæ ergo Applicatarum extremitates M repræsentabunt lineam quampiam, sive rectam, sive curvam; quæ igitur hoc modo per Functionem y determinabitur. Quare, qualibet ipsius x Functio, hoc modo ad Geometriam translata, certam determinabit lineam, sive rectam sive curvam, cujus natura a natura Functionis y pendebit.

7. Hoc autem modo linea curva, quæ ex Functione y resultat, perfecte cognoscitur; quoniam omnia ejus puncta ex Functione y determinantur; in singulis enim punctis P constat longitudo Applicatæ normalis PM , cujus extremum punctum M in linea curva sit positum, sicque omnia lineæ curvæ puncta inveniuntur. Quomodocunque autem linea curva fuerit com-

LIB. II. parata, ex ejus singulis punctis rectæ normales ad rectam RS duci possunt, sicque obtinentur intervalla AP , quæ valores variabilis x exhibent, & longitudines Applicatarum PM , quæ valores Functionis y representant. Hinc nullum curvæ extabit punctum, quod non hac ratione per Functionem y definiatur.

8. Quanquam complures lineæ curvæ per motum puncti continuum mechanice describi possunt, quo pacto tota linea curva simul oculis offertur, tamen hanc linearum curvarum ex Functionibus originem hic potissimum contemplabimur, tanquam magis analyticam latiusque patentem, atque ad calculum magis accommodatam. Quælibet ergo Functio ipsius x suppedietabit lineam quandam, sive rectam sive curvam, unde vicissim lineas curvas ad Functiones revocare licebit. Cujusque ergo lineæ curvæ natura exprimeretur per ejusmodi Functionem ipsius x , quæ, dum intervalla AP ad quæ perpendiculara MP ex singulis curvæ punctis M in rectam RS demittuntur, per variabilem x indicantur, exhibeat semper veram istius Applicatæ MP longitudinem.

9. Ex hac linearum curvarum idea statim sequitur earum divisio in *continuas*, & *discontinuas* seu *mixtas*. Linea scilicet curva *continua* ita est comparata, ut ejus natura per unam ipsius x Functionem definitam exprimat. Quod si autem linea curva ita sit comparata, ut variæ ejus portiones BM , MD , DM &c., per varias ipsius x Functiones exprimantur; ita ut, postquam ex una Functione portio BM fuerit definita, tum ex alia Functione portio MD describatur; hujusmodi lineas curvas *discontinuas* seu *mixtas* & *irregulares* appellamus: propterea quod non secundam unam legem constantem formantur, atque ex portionibus variarum curvarum continuarum componuntur.

10. De curvis autem continuis in Geometria potissimum est sermo, atque infra ostendetur, quæ curvæ motu uniformi secundum regulam quandam constantem mechanice describuntur, eandem quoque per unicam Functionem exprimi, atque ideo esse

esse continuas. Sit igitur $mEBMDM$ linea curva continua, CAP. I.
 cujus naturam contineat Functio quæpiam ipsius x , quæ sit y ;
 atque manifestum est, sumtis valoribus ipsius x determinatis
 in recta RS , a puncto fixo A , tum valores ipsius y respon-
 dentes præbere Applicatarum normalium PM longitudinem.

11. In hac linearum curvarum explicatione nomina quædam
 sunt tenenda, quorum frequentissimus usus existit in doctrina
 de Lineis curvis.

Primum igitur recta RS , in qua valores ipsius x abscindun-
 tur, vocatur **AXIS**, seu linea recta *directrix*.

Punctum A , a quo valores ipsius x mensurantur, dicitur *ini-*
tium Abscissarum.

Portiones autem Axis AP , quibus determinati ipsius x va-
 lores indicantur, vocari solent **ABSCISSÆ**.

Et perpendiculares PM , ex terminis *Abscissarum* M ad li-
 nearum curvam pertinentes, nomen **APPLICATARUM** ob-
 tinerunt.

Vocantur autem hoc casu Applicatæ *normales* seu *ortho-*
gonales, quia cum Axe angulum rectum constituunt; cum enim
 simili modo Applicatæ PM ad angulum obliquum cum Axe
 constitui possint, hoc casu Applicatæ *obliquangula* vocantur;
 hic vero constanter naturam curvarum per Applicatas ortho-
 gonales explicabimus, nisi expressis verbis contrarium indicetur.

12. Si igitur *Abscissa* quæcunque AP insigniatur per varia-
 bilem x , ut sit $AP = x$, tum Functio y indicabit magnitudi-
 nem Applicatæ PM , eritque $PM = y$. Natura igitur lineæ
 curvæ, si quidem fuerit continua, exprimetur per qualitatem
 Functionis y , seu per rationem, qua y ex x & quantitatibus
 constantibus componitur. In Axe igitur RS erit portio AS
 locus *Abscissarum affirmatarum*; portio AR locus *Abscissa-*
rum negativarum; tum vero supra Axem RS existet regio
Applicatarum affirmatarum, infra autem erit regio *Applicata-*
rum negativarum.

13. Cum igitur ex qualibet Functione ipsius x nascatur li-
 nea curva continua, hæc etiam ex illa Functione cognosci at-
 que

LIB. II. que describi poterit. Tribuantur enim primo ipsi x valores affirmativi à 0 ad ∞ usque progrediendo, ac pro singulis quarantur valores Functionis y respondentes, quæ per Applicatas, sive sursum sive deorsum porrectas, repræsententur, prout valores habeant sive affirmativos sive negativos; sicque orietur portio curvæ BMM . Deinde simili modo ipsi x tribuantur omnes valores negativi ab 0 ad $-\infty$ progrediendo, & valores ipsius y respondentes determinabunt curvæ portionem BE_m , sicque univèrsa linea curva in Functione contenta exhibebitur.

14. Quia est y Functio ipsius x ; vel y æquabitur Functioni ipsius x explicitæ, vel dabitur æquatio inter x & y , qua y per x definitur: utroque casu habebitur æquatio, quæ dicitur naturam curvæ exprimere. Hanc ob rem natura cujusque lineæ curvæ per æquationem inter duas variables x & y exhibetur; quarum altera x denotet Abscissas in Axe a dato principio A sumtas; altera vero y Applicatas ad Axem normales. Abscissæ autem & Applicatæ conjunctim consideratæ appellantur **COORDINATÆ orthogonales**: hincque natura lineæ curvæ per æquationem inter Coordinatas orthogonales definiri dicitur, si habeatur æquatio determinans, qualis Functio ipsius x sit y .

15. Cum igitur linearum curvarum cognitio ad Functiones perducatur, tot varia linearum curvarum existent genera, quot supra Functionum esse vidimus. Ad modum ergo Functionum lineæ curvæ aptissime dividuntur in *algebraicas* & *transcendentes*. Linea curva scilicet erit algebraica, si Applicata y fuerit Functio algebraica ipsius Abscissæ x ; seu, cum natura lineæ curvæ exprimitur per æquationem algebraicam inter Coordinatas x & y , hujus generis lineæ curvæ quoque *geometricæ* vocari solent. Linea curva autem *transcendens* est, cujus natura exprimitur per æquationem transcendentem inter x & y ; seu, ex qua fit y Functio transcendens ipsius x . Hæcque est præcipua linearum curvarum continuarum divisio, qua eæ sunt vel *algebraicæ* vel *transcendentes*.


16. Ad lineam autem curvam ex data Functione ipsius x , qua Applicata y exprimitur describendam, natura Functionis,

an sit uniformis, an multiformis probe est attendenda. Ponamus primo y esse Functionem uniformem ipsius x , seu esse $y = P$, denotante P Functionem quamcunque uniformem ipsius x ; &, quia ipsi x valorem quemvis determinatum tribuendo, Applicata y unum quoque valorem determinatum recipit, unicuique Abscissæ una respondebit Applicata, & hanc ob rem Curva ita erit comparata, ut, si in quovis Axis RS puncto P ducatur ad ipsum normalis PM , ea semper Curvam secet, idque in unico puncto M . Singulis ergo Axis punctis singula respondebunt Curvæ puncta; &, cum Axis utrinque in infinitum extendatur, Curva quoque utrinque in infinitum excurrat. Seu Curva ex tali Functione orta continuo tractu utrinque cum Axe in infinitum porrigetur, cujusmodi tractum figura 2 exhibet, ubi linea curva $mEBMDM$ utrinque sine ulla interruptione in infinitum excurrit.

17. Sit y Functio biformis ipsius x , seu denotantibus litteris P & Q Functiones ipsius x uniformes, sit $yy = 2Py - Q$ ut sit $y = P \pm \sqrt{PP - Q}$. Unicuique igitur Abscissæ x respondebit duplex Applicata y , utraque existente vel reali vel imaginaria: prius si $PP > Q$, posterius si $PP < Q$. Quamdiu ergo uterque valor ipsius y erit realis, Abscissæ AP duplex conveniet Applicata PM , PM , seu recta ad Axem in P normalis Curvam in duobus punctis M & M trajiciet. Ubi autem fit $PP < Q$, ibi Abscissæ nulla conveniet Applicata; seu normalis ad Axem his in locis Curvæ nusquam occurret, uti fit in p . At cum ante esset $PP > Q$, fieri non poterit $PP < Q$, nisi transeundo per casum $PP = Q$, qui erit limes inter Applicatas reales & imaginarias. Ubi ergo Applicatæ reales desinunt, uti in C vel G , ibi fit $y = P \pm 0$, seu ambæ Applicatæ inter se sunt æquales, ibique Curva curtum inflectendo regredietur.

18. Secundum Figuram apparet, dum Abscissa negativa $-x$ continetur intra limites AC & AE , Applicatam y fieri imaginariam, esseque $PP < Q$: ultra E vero sinistrorsum progrediendo Applicatæ iterum sunt reales, quod fieri nequit nisi

LIB. II. in E fit $PP = Q$, ideoque ambæ Applicatæ convenient. Tum rursus Abscissis AP duplex Applicata Pm , Pm respondet, donec ad G perveniatur, ubi hæ duæ Applicatæ conveniunt, atque ultra G denuo fiunt imaginariæ. Hujusmodi ergo linea curva constare poterit ex partibus a se invicem disjunctis ut $MBDBM$ & $FmHm$ duabus pluribusve: nihilo vero minus hæ partes conjunctim consideratæ unam Curvam continuam seu regularem constituere sunt censendæ, quia hæ singulæ partes ex una eademque Functione nascuntur. Istæ ergo Curvæ hanc habent proprietatem, ut, si in singulis Axis punctis normaliter producantur rectæ MM , eæ semper Curvam vel nusquam vel in duobus punctis trajiciant; nisi forte duo intersectionis puncta in unum coalescant, quod fit si Applicatæ per puncta D, F, H , vel I ducantur.

19. Si y fuerit Functio triformis ipsius x , seu si y per hujusmodi æquationem $y^3 - Py^2 + Qy - R = 0$ definiatur, existentibus P, Q , & R Functionibus uniformibus ipsius x , tum pro quovis valore ipsius x Applicata y tres habebit valores, qui, vel omnes erunt reales, vel unicus tantum, reliquis duobus existentibus imaginariis. Hinc omnes Applicatæ Curvam secabunt, vel in tribus punctis, vel tantum in unico, nisi ubi duo vel etiam tria intersectionis puncta in unum coalescant. Cum igitur unicuique Abscissæ saltem una Applicata realis conveniat, necesse est ut Curva utrinque cum Axe in infinitum excurrat. Curva ergo vel uno continuo tractu constabit, ut in *Figura quarta*; vel duabus partibus a se sejunctis, ut *Fig. 4* ; vel pluribus, quæ tamen omnes conjunctæ unam eandemque Curvam continuam constituunt.

TAB. I.
Fig. 4 
5.

20. Si y fuerit Functio quadriformis ipsius x , seu si y per hujusmodi æquationem $y^4 - Py^3 + Qy^2 - Ry + S = 0$ definiatur, tum unicuique valori ipsius x , vel quatuor respondebunt valores reales ipsius y , vel duo tantum, vel omnino nullus. Hinc, in Curva ex hujusmodi Functione quadriformi orta singulæ Applicatæ Curvam secabunt vel in quatuor punctis, vel

vel in duodus tantum, vel nusquam, quos singulos casus *Figura* C A P. I.
Sexta exhibet; notari autem debent loca I & o, ubi duo in- TAB. II.
 terfectionis puncta in unum coalescunt. Hanc ob rem tam dex- Fig. 6.
 trorsum quam sinistrorsum vel nulli Curvæ rami in infinitum
 excurrunt, vel duo vel etiam quatuor. Priori casu, quo ex
 neutra parte nulli rami in infinitum extenduntur, Curva undi-
 que erit clausa, ut figura indicat, spatiumque definitum inclu-
 dit. Hinc ergo jam concludi potest indoles linearum curva-
 rum, quæ formantur ex Functionibus multiformibus quotcun-
 que significatum.

21. Si scilicet fuerit y Functio multiformis, seu determi-
 netur per æquationem, in qua n sit exponens maximæ potestatis
 ipsius y , tum numerus valorum realium ipsius y erit vel n ,
 vel $n - 2$, vel $n - 4$, vel $n - 6$, &c., in totidem ergo
 punctis quælibet Applicata Curvam interfecabit. Ita, si una Ap-
 plicata Curvam continuam secet in m punctis, omnes aliæ Ap-
 plicatæ Curvam secabunt in tot punctis, quorum numerus sem-
 per numero pari differat ab m ; nusquam ergo Curva ab Ap-
 plicata secari poterit in $m + 1$, vel $m - 1$, vel $m \pm 3$ &c.,
 punctis. Hoc est, si numerus intersectionum unius Applicatæ
 fuerit par vel impar, omnes quoque Applicatæ reliquæ Cur-
 vam secabunt in punctorum numero vel pari vel impari.

22. Si igitur una Applicata Curvam secet in punctorum nu-
 mero impari, tum fieri nequit, ut ulla alia Applicata Curvam
 nusquam interfecet: Curva ergo utrinque ad minimum unum
 habebit ramum in infinitum excurrentem, & si ex alterutra
 parte plures rami in infinitum extendantur, eorum numerus
 debet esse impar, quia numerus intersectionum unius cujusque
 Applicatæ non potest esse par; si ergo rami utrinque in infi-
 nitum excurrentes simul numerentur, eorum numerus constan-
 ter erit par. Hoc idem locum habet si Applicatæ Curvam in-
 terficerent in punctorum numero pari, tum enim ex utraque parte
 seorsim vel nullus, vel duo, vel quatuor &c., rami in infi-
 nitum excurrunt, unde ergo quoque omnium ramorum in infi-
 nitum excurrentium numerus erit par. Jam igitur adepti su-

LIB. II. mus aliquot insignes proprietates Curvarum continuarum & regularium, unde eas a Curvis discontinuis & irregularibus discernere licet.

C A P U T I I.

De Coordinatarum permutatione.

T A B. I.
Fig. 2.

23. **Q**uemadmodum ex æquatione inter Coordinatas x & y , quarum illa Abscissam, hæc Applicatam denotat, data Curva describitur super Axe RS , initio Abscissarum A alicubi pro lubitu assumto, ita vicissim, si jam descripta fuerit linea curva ejus natura exprimi poterit per æquationem inter Coordinatas. Hic autem quamvis Curva sit data, duæ tamen res in arbitrio nostro relinquuntur, positio scilicet Axis RS , & principium Abscissarum A . Quæ cum infinitis modis variari queant, etiam pro eadem linea Curva innumerabiles æquationes exhiberi poterunt, hancque ob causam ex æquationum diversitate non semper ad diversitatem linearum curvarum, quæ illis æquationibus exprimentur concludere licet, etiamsi diversæ Curvæ perpetuo diversas præbeant æquationes.

24. Cum igitur, variato tam Axe quam Abscissarum initio, innumerabiles oriantur æquationes ejusdem Curvæ naturam exprimentes, hæ omnes ita inter se erunt comparatæ, ut ex data æquatione una reliquæ omnes inveni queant. Ex data enim æquatione inter Coordinatas ipsa linea curva determinatur, hac autem cognita, si quæcunque linea recta pro Axe, & in ea punctum pro Abscissarum principio assumatur, æquatio inter Coordinatas orthogonales definietur. Hoc igitur Capite methodum trademus, cujus ope, si æquatio pro Curva fuerit data, ad alium Axem quemcunque, & Abscissarum initium quodcunque æquatio inter Coordinatas inveniri queat, quæ ejusdem Curvæ naturam exprimat. Atque hoc modo reperientur
omnes

omnes omnino æquationes, quæ ejusdem Curvæ naturam comprehendant, sicque facilius diversitas linearum curvarum ex æquationum diversitate dijudicari poterit.

25. Sit igitur data æquatio quæcunque inter x & y , ex qua sumta recta RS pro Axe, & puncto A pro initio Abscissarum, ita ut x denotet Abscissam AP & y Applicatam PM , producat lineam curvam CBM , cujus ergo natura per æquationem datam exprimitur. Retineamus jam primum eundem Axem RS , at aliud punctum in eo D pro initio Abscissarum assumamus, ita ut nunc puncto curvæ M respondeat Abscissa DP , quæ ponatur $=t$, Applicata vero MP manebit eadem $=y$, quæ ante: quæramus igitur æquationum inter t & y , quæ ejusdem Curvæ CBM natura exprimitur. Ponatur intervallum $AD = f$, quod ab A sinistrorsum in regionem Abscissarum negativarum cadat, eritque $DP = t = f + x$, ideoque $x = t - f$. Quare si in æquatione inter x & y data ubique loco x substituatur $t - f$, prodibit æquatio inter t & y , quæ eandem lineam curvam CBM exhibebit. Cum igitur magnitudo $AD = f$ ab arbitrio nostro pendeat, jam innumerabiles diversas adepti sumus æquationes, quæ omnes eandem lineam curvam expriment.

26. Si Curva alicubi Axem RS trajiciat, uti in C , tum sumto hoc puncto C pro initio Abscissarum, ejusmodi obtinebitur æquatio, quæ, posita Abscissa $CP = 0$, simul Applicatam PM evanescentem sit præbitura; si quidem unica tantum Applicata puncto Axis C respondeat. Intersectio autem C , si ulla pluresve dentur, invenietur ex æquatione primum proposita inter x & y , ponendo $y = 0$, & ex æquatione quærendo valorem vel valores ipsius x . Ubi enim Curva in Axem incidit, ibi fit $y = 0$, factò ergo vicissim $y = 0$, omnes illæ Abscissæ seu valores ipsius x elicientur, ubi Curva in Axem incidit.

27. Initium ergo Abscissarum, retento Axe, mutabitur si Abscissa x data quantitate sive augeatur sive minuat; hoc est, si loco x ponatur $t - f$: ubi f erit quantitas affirmativa, si

LIB. II. novum Abscissarum initium D sinistrorsum ab A fuerit remotum; erit vero f quantitas negativa, si punctum D ad dextram ab A fuerit situm.

TAB. II. Ponamus nunc descripta Curva LBM ex data æquatione
 Fig. 8. inter $AP = x$ & $PM = y$, alium assumi Axem rs priori parallelum in eoque punctum D pro Abscissarum initio: cadat autem iste Axis in regionem Applicatarum negativarum, sitque ejus a priori Axe distantia $AF = g$, atque ponatur interval- lum $DF = AG = f$. Sit igitur in hoc novo Axe Abscissa puncto Curvæ M respondens, $DQ = t$, & Applicata $QM = u$, eritque $t = DF + FQ = f + x$, & $u = PM + PQ = g + y$, unde fit $x = t - f$ & $y = u - g$. Quare si in æquatione inter x & y data substituatur ubique $t - f$ loco x , & $u - g$ loco y , orietur æquatio inter t & u , qua ejusdem lineæ curvæ natura exprimeretur.

28. Cum igitur magnitudines f & g ab arbitrio nostro pendeant, hincque infinitis modis definiri queant, infinities plures diversæ formari poterunt æquationes quam priori casu, quæ tamen omnes ad eandem lineam curvam pertineant. Quod si ergo duæ æquationes altera inter x & y , & altera inter t & u , hoc tantum a se invicem discrepent, ut altera in alteram transformetur, si Coordinatæ unius datis quantitatibus sive au- geantur sive minuantur, tum ambæ æquationes licet diversæ tamen eandem lineam curvam exhibebunt. Hinc igitur facile innumerabiles formabuntur æquationes diversæ, quæ tamen omnes ejusdem lineæ curvæ naturam expriment.

TAB. II. 29. Statuatur novus Axis rs normalis ad priorem RS , se-
 Fig. 9. canisque ipsum in principio Abscissarum A , ita ut pro utroque Axe idem sit Abscissarum initium A . Quoniam pro Axe RS datur æquatio ad Curvam LM inter Abscissam $AP = x$, & Applicatam $PM = y$, ducatur ex Curvæ puncto M in novum Axem rs perpendicularis MQ & vocetur Abscissa nova $AQ = t$, Applicata nova $QM = u$, eritque ob $APMQ$ parallelogrammum rectangulum, $t = y$ & $u = x$. Hinc, ex æ- quatione inter x & y data, formabitur æquatio inter t & u ,
 ponendo

ponendo u loco x & t loco y . Prior ergo Abscissa x nunc CAP. II.
 abit in Applicatam $QM = u$, & prior Applicata y nunc abit
 in Abscissam $AQ = t$, pro isto itaque novo Axe nulla alia
 æquationi variatio inducitur nisi, quod Coordinatæ x & y
 inter se commutentur: hancque ob rationem Abscissa & Ap-
 plicata simul Coordinatæ vocari solent, nullo facto discrimine,
 utra pro Abscissa Applicatave accipiatur. Proposita enim æ-
 quatione inter duas Coordinatas x & y , eadem Curva emergit,
 five x five y ad Abscissam indicandam accipiatur.

30. Posuimus hic novi Axis rs portionem As exhibere
 Abscissas affirmativas, atque ad dextram Axis rs statui regio-
 nem Applicatarum affirmatarum, quæ cum ab arbitrio pen-
 deant, pro lubitu immutari poterunt. Scilicet si Axis portio
 Ar Abscissis affirmativis destinetur, erit utique $AQ = -t$,
 sicque in æquatione inter x & y loco y poni debet $-t$.
 Deinde si ad dextram Axis rs regio Applicatarum negativarum
 statuat, fiet $QM = -u$, atque pro x scribi debebit $-u$.
 Atque hinc intelligitur naturam lineæ curvæ non mutari etiamsi
 in æquatione inter Coordinatas vel alterutra vel utraque ne-
 gativa statuatur; id quod in omnibus æquationis transmutatio-
 nibus est tenendum.

31. Secet nunc novus Axis rs priorem RS sub angulo quo- TAB. II
 cunque SAs ; fiatque intersectio in ipso Abscissarum initio A , Fig. 10.
 quod punctum in utroque Axe initium Abscissarum constituat.
 Data ergo sit pro Axe RS æquatio quæcunque pro Curva LM
 inter Abscissam $AP = x$ & Applicatam $PM = y$, ex qua
 reperiri debeat æquatio ad eandem Curvam pro novo Axe rs ,
 seu ex Curvæ puncto M ad novum Axem demisso perpendi-
 culo MQ , inter Abscissam novam $AQ = t$, & Applicatam
 $MQ = u$. Sit angulus $SAs = q$; ejus Sinus $= m$, & Co-
 finus $= n$, sumta unitate pro Sinu toto ut fit $mm + nn = 1$.
 Ex P ducantur normales Pp & Pq in novas Coordinatas, erit-
 que ob $AP = x$, $Pp = x \cdot \sin. q$; $Ap = x \cdot \cos. q$, deinde
 quia angulus $PMQ = PAQ = q$, erit ob $PM = y$, $Pq =$
 $Qp = y \cdot \sin. q$; $Mq = y \cdot \cos. q$. Ex his ergo fiet $AQ = t =$
 Ap ---

LIB. II. $Ap - Qp = x \cdot \text{cos. } q - y \cdot \text{sin. } q$, & $QM = u = Mq +$
 $PP = x \cdot \text{sin. } q + y \cdot \text{cos. } q$.

32. Cum autem sit $\text{sin. } q = m$, $\text{cos. } q = n$, erit $t = nx -$
 my & $u = mx + ny$, hinc fiet $nt + mu = mnx + mny = x$,
 & $nu - mt = nny + mmy = y$. Aequatio ergo quaesita inter
 t & u reperietur, si in aequatione inter x & y proposita ubi-
 que loco x scribatur $mu + nt$ & $nu - mt$ loco y , si quidem
 Axis portio As contineat Abscissas affirmativas, & Applicatae
 affirmativae in regionem QM cadant. Posuimus hic etiam an-
 gulum SA_s in regionem Applicatarum negativarum cadere;
 quod si autem As supra AS caderet, in calculo angulus SA_s
 $= q$ negativus, ac propterea ejus Sinus m negative accipi
 deberet.

TAB. III.
 Fig. I I.

33. Tribuatur nunc novo Axi rs positio quaecunque, in eo-
 que sumatur punctum quodvis D pro Abscissarum initio. Sit
 RS Axis prior, pro quo habetur aequatio inter Abscissam
 $AP = x$ & Applicatam $PM = y$, qua natura Curvae LM
 exprimitur; unde aequatio inter alias Coordinatas t & u ad
 novum Axem rs relatas exhiberi debet. Demisso scilicet ex
 quovis Curvae puncto M in novum Axem rs perpendicularo MQ
 vocetur Abscissa $DQ = t$, & Applicata $QM = u$. Inter
 quas ut aequatio inveniatur, ex novo Abscissarum initio D in
 Axem priorem RS ducatur perpendicularis DG , ac ponatur
 $AG = f$ & $DG = g$, tum per D priori Axi RS producat
 parallela DO , cui prior Applicata PM producta occurrat in
 O , eritque $MO = y + g$, & $DO = GP = x + f$. De-
 nique ponatur angulus $ODQ = q$, cujus Sinus sit $= m$, &
 Cofinus $= n$, posito semper Sinu toto $= 1$, ut sit $mm +$
 $nn = 1$.

34. Jam ex puncto O ducantur tam in novum Axem DQ
 quam in Applicatam MQ normales Op & Oq , atque, ob an-
 gulum $OMQ = ODQ$ & $DO = x + f$, ac $MO = y + g$,
 erit $Op = Qq = (x + f) \cdot \text{sin. } q = mx + mf$ & $Dp =$
 $(x + f) \cdot \text{cos. } q = nx + nf$. Porroque $Oq = Qp = (y +$
 $g) \cdot \text{sin. } q = my + mg$ & $Mq = (y + g) \cdot \text{cos. } q = ny + ng$.
 Ex

Ex his igitur colligetur $DQ = t = nx + nf - my - mg$ & $QM = u = mx + mf + ny + ng$, sicque ex x & y definiuntur novæ Coordinatæ t & u . Hinc vero erit $nt + mu = x + f$ & $nu - mt = y + g$, ob $mm + nn = 1$, quocirca habebitur $x = mu + nt - f$, & $y = nu - mt - g$, qui ergo valores si in æquatione inter x & y data loco x & y substituantur, prodibit æquatio inter t & u , qua ejusdem Curvæ LM natura exprimeretur.

35. Quoniam nullus excogitari potest Axis rs , qui quidem in eodem plano cum Curva sit situs, qui non in hac postrema determinatione contineatur; pro eadem quoque Curva LM nulla existet æquatio inter Coordinatas orthogonales, quæ non in hac æquatione inter t & u inventa comprehendatur. Cum igitur quantitates f & g cum angulo q , unde m & n pendent, infinitis modis variari queant, omnes æquationes, quæ in æquatione inter t & u hoc modo inventa continentur, ejusdem lineæ curvæ naturam expriment. Hanc ob rem ista æquatio inter t & u vocari solet æquatio generalis pro Curva LM , quoniam ea in se complectitur omnes omnino æquationes, quæ ad eandem lineam curvam pertinent.

36. Supra jam innuimus difficile esse ex diversitate aliquot æquationum inter Coordinatas judicare, utrum eæ ad eandem lineam curvam, an ad diversas referantur: nunc igitur patet via omnes hujusmodi quæstiones dijudicandi. Sint enim duæ propositæ æquationes, altera inter x & y , & altera inter t & u , ponatur in illa $x = mu + nt - f$ & $y = nu - mt - g$, ubi m & n ita a se invicem pendent ut sit $mm + nn = 1$; quo factò dispiciendum erit utrum altera illa æquatio inter t & u in hac, quæ modo est eruta, contineatur, seu an quantitates f , g cum m & n ita definiri possint, ut ipsa altera æquatio inter t & u resultet. Quod si fieri possit, amba æquationes eandem lineam curvam expriment, sin secus diversas.

LIB. II.

EXEMPLUM.

Hoc modo patebit has duas æquationes

$$yy - ax = 0$$

&

$$16uu - 24tu + 9tt - 55au + 10at = 0,$$

ad eandem lineam curvam referri, etiamsi ipsæ plurimum discrepent: si enim in priori æquatione ponamus $x = mu + nt - f$ & $y = nu - mt - g$, ea transformabitur in hanc

$$nnuu - 2mntu + mmtt - 2ngu + 2mgt + gg = 0.$$

- mau - nat + af = 0.

Num igitur in hac altera illa æquatio contineatur, multiplicemus illam per nn hanc vero per 16 , ut termini primi utriusque congruant, habebiturque

$$16nnuu - 24nntu + 9nntt - 55nnau + 10nnaat = 0$$

&

$$16nnuu - 32mntu + 16m^2tt - 32ngu + 32mgt + 16gg = 0.$$

- 16mau - 16nat + 16af = 0.

Nunc inquiretur quot termini, arbitrariis f , g , m & n determinandis, æquales reddi queant, ac primo quidem habebimus $24nn = 32mn$ & $9nn = 16mm$, quarum utraque dat $3n = 4m$, & ob $mm = 1 - nn$, erit quoque $25nn = 16$, hinc $n = \frac{4}{5}$ & $m = \frac{3}{5}$, sicque jam tres termini conveniunt.

Quartus & quintus dant $55nna = 32ng + 16ma$ & $10nna = 32mg - 16na$, unde an idem pro g valor eruat videndum est, dat vero prior $g = \frac{55na}{32} - \frac{ma}{2n} = \frac{11a}{8} - \frac{3a}{8} = a$, &

posterior $g = \frac{5ma}{16n} + \frac{na}{2m} = \frac{a}{3} + \frac{2a}{3} = a$, uterque ergo valor congruit, & jam quinque termini conveniunt. Nil aliud ergo

ergo superest, nisi ut sit $gg + af = 0$, quod, cum f nondum sit determinatum, nil habet difficultatis, fiet enim $f = -a$. Ostensum ergo est, has duas æquationes propositas eandem lineam curvam exhibere.

37. Quanquam autem fieri potest, ut æquationes admodum diversæ eandem lineam curvam repræsentent, tamen sæpenu-mero ex æquationum diversitate tuto linearum curvarum diversitas concluditur. Evenit hoc si æquationes propositæ ad diversos ordines pertineant, seu in quibus maximæ dimensio-nes, quas Coordinatæ x & y seu t & u constituunt, sunt di-versæ, hoc enim casu lineæ curvæ, quæ per has æquationes indicantur, certo erunt diversæ. Cujuscunque enim ordinis fue-rit æquatio inter x & y , si ponatur $x = mu + m - f$ & $y = nu - mt - g$, resultabit æquatio inter t & u ejusdem ordi-nis; quare, si altera æquatio inter t & u proposita ad alium ordi-nem pertineat, Curvam quoque diversam indicabit.

38. Nisi igitur duæ æquationes, altera inter x & y altera inter t & u , ad eundem ordinem pertineant, statim concludendum est lineas curvas, quæ illis æquationibus exprimuntur, esse di-versas. Dubitatio ergo tantum locum habere potest, si ambæ æquationes fuerint ejusdem ordinis, hisque solum casibus investiga-tione ante tradita opus erit, quæ autem cum satis operosa eva-dat, si æquationes ad altiore quempiam ordinem pertineant, infra expeditiores regulæ tradentur, ex quibus statim varietas Curvarum dignosci poterit.

39. Quæ hic de inveniendâ æquatione generali pro quavis linea curva sunt præcepta, eadem ad lineam rectam accommo-dari possunt. Sit enim, loco lineæ curvæ, proposita linea rec-ta LM , quam Axi RS parallelam statuamus: ubicunque ergo initium Abscissarum A capiatur, erit semper Applicata PM constantis magnitudinis, seu $y = a$; quæ ergo est æquatio pro linea recta Axi parallela. Quæramus hinc æquationem gene-rale[m] lineæ rectæ ad Axem quemcunque rs relatam; posito ergo $DG = g$, anguli ODs Sinu $= m$, Cosinu $= n$, & vocata Abscissa $DQ = t$, & Applicata $MQ = u$, ob $y =$

TAB. III.
Fig. 12.

LIB. II. $uu - mt - g$, erit $uu - mt - g - a = 0$, quæ est æquatio generalis pro linea recta. Multiplicetur ea per constantem k & ponatur $uk = a$, $mk = -c$ & $(g+a)k = -b$, eritque æquatio $au + ct + b = 0$ pro linea recta, quæ cum sit æquatio primi ordinis inter t & u generalis, patet omnem æquationem primi ordinis inter duas Coordinatas, nullam lineam curvam, sed rectam lineam exhibere.

TAB. III.
Fig. 13.

40. Quoties ergo inter Coordinatas x & y talis prodit æquatio $ax + cy - a = 0$; toties ea præbet lineam rectam, cujus positio respectu Axis RS ita determinabitur. Ponatur primo $y = 0$, sicque in Axe reperitur punctum C , ubi hæc recta Axem trajicit, fit enim $AC = \frac{a}{c}$; tum ponatur $x = 0$,

fitque $y = \frac{a}{c}$ qui est valor Applicatæ AB in initio Abscissarum. Cum ergo habeantur duo puncta, B & C , in recta quaesita, ea erit definita, ideoque æquationi propositæ satisfaciet recta LM . Ponatur enim Abscissa quæcunque $AP = x$ & respondens Applicata $MP = y$, erit ob similitudinem triangulorum CPM , CAB , $CP : PM = CA : AB$, hoc est $\frac{a}{c} - x : y = \frac{a}{c} : \frac{a}{c}$, unde fit $\frac{ay}{a} = \frac{a}{c} - \frac{ax}{c}$, seu $ax + cy = a$, quæ est ipsa æquatio proposita.

41. Si fuerit vel a vel $c = 0$, tum ista constructio usum habere non poterit, at vero isti casus per se sunt facillimi. Sit enim $a = 0$, & $y = a$, unde patet lineam satisfacientem esse rectam Axi parallelam ab eoque intervallo $= a$ remotam, sin sit $a = 0$, seu $y = 0$, linea satisfaciens in Axem incidet. Quod si vero fuerit $c = 0$, & $x = a$, perspicuum est lineam satisfacientem esse rectam ad Axem normalem, quæ ab initio Abscissarum intervallo $= a$ distet. Hoc scilicet casu omnibus Applicatis unica Abscissa respondet, ita ut Abscissa quantitas variabilis esse desinat. Ex his igitur luculenter perspicitur, quemadmodum lineæ rectæ per æquationes inter Coordinatas orthogonales designari queant.

42. Assumimus hætenus Coordinatas, quibus natura Curvæ definitur, inter se esse normales, simili vero modo etiam ex data æquatione linea curva definietur, si Applicatæ ad Axem sub angulo quocunque inclinentur. Vicissim ergo natura Curvæ exprimi poterit per æquationem inter duas Coordinatas obliquangulas, atque hujusmodi æquationes quoque variatis cum Axe tum principio Abscissarum innumerabilibus modis variari possunt, manente Curva eadem. Sicque pro quavis obliquitate Coordinatarum æquatio generalis ad Curvam exhiberi potest. Quod si vero etiam hæc obliquitas alia atque alia statuatur, multo latius patens eruetur æquatio pro Curva, quam æquationem generalissimam appellabimus, quoniam naturam Curvæ non solum exprimit per æquationem ad quemvis Axem & quodcunque initium Abscissarum relatam, sed etiam pro quacunque Coordinatarum obliquitate. Hæcque adeo æquatio generalissima abibit in æquationem generalem, si angulus, quem Coordinatæ inter se constituunt, rectus statuatur.

43. Data sit pro Curva LM æquatio inter Coordinatas re-

TAB. III.

Fig. 14.

ctangulas, nempe inter $AP = x$ & $PM = y$, & quærat, retento Axe RS & initio Abscissarum A eodem, æquatio inter Coordinatas, quæ datum angulum comprehendat qui sit $= \phi$. Ex puncto ergo M ad Axem RS ducatur recta MQ ad angulum illum datum MQA , cujus Sinus sit $= \mu$ & Cofinus $= \nu$. Erit ergo AQ nova Abscissa, & MQ nova Applicata: posito ergo $AQ = t$ & $QM = u$, erit in triangulo re-
 ctangulo PMQ , $\frac{y}{u} = \mu$ & $\frac{PQ}{u} = \nu = \frac{t-x}{u}$. Quocirca

fiet $u = \frac{y}{\mu}$ & $t = \nu u + x = \frac{\nu y}{\mu} + x$, & vicissim $y = \mu u$ & $x = t - \nu u$. Consequenter si in æquatione inter x & y proposita ponatur $x = t - \nu u$ & $y = \mu u$ prodibit æquatio inter Coordinatas obliquangulas t & u , quæ inter se datum angulum ϕ constituent.

44. Quod si autem data fuerit pro Curva LM æquatio inter Coordinatas obliquangulas AQ & QM ; ex ea vicissim

LIB. II. reperietur æquatio pro eadem Curva inter Coordinatas orthogonales AP & PM . Sit enim ϕ angulus, quem Applicatæ MQ cum Abscissis AQ , constituunt, cujus Sinus $= \mu$ & Cofinus $= \nu$. dataque sit æquatio inter $AQ = t$ & $QM = u$. Ex M ducatur ad Axem Applicata normalis MP , &, posita Abscissa $AP = x$ & Applicata $MP = y$, quia est $u = \frac{y}{\mu}$ & $t = \frac{\nu y}{\mu} + x$, si hi valores in æquatione inter t & u proposita substituantur, prodibit æquatio inter x & y , quæ quærebatur.

TAB. IV. 45. Data nunc æquatione inter Coordinatas orthogonales
 Fig. 15. $AP = x$, & $PM = y$ pro Curva LM , hoc modo æquatio generalissima pro eadem linea curva inveniri poterit. Sumatur recta quæcunque rs pro Axe, & in eo punctum D pro Abscissarum initio; Applicatæ vero MT ad hunc Axem ductæ faciant angulum $DTM = \phi$, cujus Sinus sit $= \mu$ & Cofinus $= \nu$; erit ergo nova Abscissa DT & Applicata TM , inter quas æquatio quæritur. Ex D in Axem priorem RS ducatur perpendicularis DG , & sit $AG = f$; $DG = g$, ductaque DO Axi RS parallela sit anguli ODs Sinus $= m$, Cofinus $= n$. Ducatur, ut ante fecimus, ex M ad Axem novum rs normalis MQ , & ponatur $DQ = t$; $QM = u$; Coordinatæ autem obliquangulæ sint $DT = r$; $TM = s$; Erit ergo primo $t = r - \nu s$ & $u = \mu s$ (43); deinde vero est $x = mu + nt - f$ & $y = nu - mt - g$ (36). Hinc fiet $x = nr - (n\nu - m\mu)s - f$ & $y = -mr + (\mu n + \nu m)s - g$, ubi est $n\nu - m\mu$ Cofinus anguli AVM , quem novæ Applicatæ cum Axe priori RS constituunt, & $\mu n + \nu m$ est Sinus hujus anguli AVM . Quod si ergo in æquatione inter x & y loco x & y illi valores inventi substituantur, prodibit æquatio inter Coordinatas obliquangulâs r & s , quæ erit æquatio generalissima pro Curva LM .

46. Quoniam in valoribus, qui loco x & y substituantur, novarum variabilium r & s unica inest dimensio, manifestum est æquationem generalissimam ejusdem esse ordinis, cujus erat æquatio

æquatio proposita inter x & y . Quomocunque ergo æquatio ad eandem Curvam transformetur, mutatis utcunque tam Axe, & Abscissarum initio, quam inclinatione mutua Coordinatarum, tamen perpetuo æquatio ejusdem erit ordinis. Quamquam ergo æquatio inter Coordinatas, sive orthogonales sive obliquangulas, infinitis modis variari potest, ut ad eandem Curvam pertineat, tamen neque ad ordinem altiolem evehi, neque ad inferiorem deprimi poterit. Atque hanc ob causam æquationes diverſi ordinis, utcunque alias fuerint affines, tamen semper Curvas diverſas exhibebunt.

C A P U T I I I.

De Linearum curvarum algebraïcarum in ordines divisione.

47. **C**UM Linearum curvarum pariter ac Functionum varietas sit infinita, earum cognitio nullo modo acquiri poterit, nisi infinita multitudo in certas classes digeratur, hocque modo mens in earum scrutatione dirigatur atque adjuvetur. Divisimus jam quidem Lineas curvas in *algebraïcas* & *transcendentes*, verum utraque classis, ob infinitam Curvarum varietatem, ulteriori subdivisione opus habet. Hic autem tantum Curvas *algebraïcas* spectamus, quas quemadmodum commodissime in classes distribui conveniat, dispiciamus. Characteres igitur primum definiendi sunt, quibus classum varietates determinentur, ita ut quæ Curvæ eodem caractere sint præditæ, eæ ad eandem; quæ contra, ad diverſas classes referantur.

48. Characteres ergo isti varias classes distinguentes aliunde, nisi ex Functionibus seu æquationibus, quibus Linearum curvarum natura continetur, peti nequeunt; cum, quia alia via ad Curvarum cognitionem perveniendi adhuc non patet; tum, quia nulla alia, quæ quidem datur, omnes Curvas algebraïcas sub

LIB. II. sub se complectitur. Functiones vero & æquationes inter binas Coordinatas pluribus modis in diversa genera distribui possunt, uti fecimus in libro superiori. Ac primo quidem Functionum multiformitas se offert, quæ ad Linearum curvarum in varias classes distributionem præ aliis apta videtur; unde huiusmodi divisio oriretur, ut eæ Lineæ curvæ, quæ ex Functionibus uniformibus oriuntur, ad genus primum, quæ ex biformibus ad secundum, quæ ex triformibus ad tertium referantur & ita porro.

49. Quamvis autem hæc divisio videatur naturalis, tamen, si diligentius perpendatur, naturæ Linearum curvarum, earumque indoli minime conformis deprehendetur. Multiformitas enim Functionum ab Axis positione, quæ est arbitraria, potissimum pendet, ita ut, si pro uno Axe Applicata fuerit Functio uniformis Abscissæ, eadem, alio assumpto Axe, Functio multiformis esse queat; hoc ergo modo eadem Linea curva in diversis generibus occurreret, quod est contra institutum. Sic enim Linea curva hac æquatione $a^3 y = aaxx - x^4$ expressa pertineret ad genus primum, quia Applicata y est Functio uniformis ipsius x ; permutatis vero Coordinatis, seu Axe sumto ad priorem normali, eadem Curva exprimitur æquatione $y^4 - aayy + a^3 x = 0$, sicque ad genus quartum pertineret. Hanc igitur ob causam multiformitas Functionum ad characterem, quo Lineæ curvæ in classes distribuuntur, constituendum admitti nequit.

50. Æque parum simplicitas æquationum naturam Linearum curvarum experimentium, ratione numeri terminorum characterem distinctionis constituere poterit. Si enim eæ Curvæ ad genus primum referantur quarum æquatio constet duobus terminis, ut $y^m = ax^n$, ad secundum quarum æquatio contineat tres terminos ut $\alpha y^{m'} + \beta y^p \cdot x^q + \gamma x^n = 0$, & ita porro, manifestum est eandem Lineam curvam in pluribus generibus occurrere. Per exemplum enim §. 36. subjunctum Linea curva æquatione

æquatione $yy - ax = 0$ contenta simul ad genus primum & CAP. III.
 quartum referri deberet, quia, mutato Axe, etiam hac æqua-
 tione

$$16uu - 24tu + 9tt - 55au + 10at = 0,$$

exprimitur. Deberet vero etiam, aliter assumpto Axe & Abscissarum initio, simul ad genus secundum, tertium, & quintum pertinere; ex quo ista divisio adhiberi omnino non potest.

51. Hæc incommoda evitabuntur si æquationum, quibus relatio inter Coordinatas exprimitur, ordines ad Curvarum classes constituendas adhibeantur. Cum enim pro eadem Linea curva, utcumque tam Axis & principium Abscissarum quam inclinatio Coordinatarum varietur, æquatio ejusdem semper ordinis maneat; eadem Linea curva non ad diversas classes referetur. Character ergo in numero dimensionum, quas Coordinatæ, sive orthogonales sive obliquangulæ, in æquatione complent, constituto, neque Axis neque principii Abscissarum mutatio, neque inclinationis Coordinatarum variatio, classium constitutionem perturbabit. Atque eadem Curva, sive æquatio inter Coordinatas specialis quæque sive generalis sive etiam generalissima spectetur, ad eandem semper classem annumerabitur. Quam ob rem character distinctionis Linearum curvarum convenientissime ab ordine æquationum petitur.

52. Quoniam igitur hæc diversa æquationum genera, quæ ex dimensionum numero constituuntur, ordines vocavimus, diversa quoque Linearum curvarum genera, quæ hinc oriuntur, ordinum nomine appellabimus. Cum ergo æquatio primi ordinis generalis sit

$$0 = a + 6x + \gamma y$$

omnes Lineas curvas, quæ sumtis x & y pro Coordinatis, sive orthogonalibus sive obliquangulis, ex hac æquatione proficiuntur, ad ordinem primum referemus. Supra autem vidimus in hac æquatione tantum Lineam rectam contineri, & hanc ob

Euleri *Introduct. in Anal. infin. Tom. II.*

D

rem

L I B. II. rem primus ordo solam Lineam rectam in se complectitur, quæ utique inter omnes Lineas est simplicissima. Cum igitur nomen Curvæ huic primo ordini non conveniat, hos ordines non *Linearum curvarum*, sed vocabulo latiori simpliciter *Linearum* vocabimus. Ordo ergo Linearum primus nullam Lineam curvam continet, sed a sola Linea recta exhaustitur.

53. Perinde autem est sive Coordinatæ statuatur rectangulæ sive obliquangulæ; quod si enim Applicatæ cum Axe faciant angulum ϕ , cujus Sinus sit μ & Cofinus ν , æquatio ad Coordinatas orthogonales reducetur, ponendo $y = \frac{u}{\mu}$ & $x = \frac{v}{\mu} + t$ (44), unde ista inter Coordinatas orthogonales t & u , æquatio nascitur

$$0 = a + \epsilon t + \left(\frac{\epsilon \nu}{\mu} + \frac{\gamma}{\mu} \right) u,$$

quæ cum non minus late pateat quam prior, utraque enim est generalis, manifestum est significationem æquationis non restringi, etiamsi angulus, quem Applicatæ cum Axe faciant, rectus statuatur. Hoc idem eveniet in æquationibus sequentium ordinum generalibus, quæ non minus late patebunt, etsi Coordinatæ orthogonales statuantur. Cum igitur æquatio generalis cujusque ordinis per determinationem inclinationis Applicatarum ad Axem nihil de vi sua perdat, ejus significatum non restringemus, si Coordinatas orthogonales statuamus. Quæcunque enim Linea curva in æquatione generali cujusque ordinis continetur, sumtis Coordinatis obliquangulis, eadem Linea curva in eadem æquatione continebitur, si Coordinatæ rectangulæ statuantur.

54. Lineæ porro secundi ordinis omnes continebuntur in hac æquatione generali ordinis secundi.

$$0 = a + \epsilon x + \gamma y + \delta x^2 + \epsilon xy + \zeta y^2$$

Omnes

Omnes scilicet Lineas curvas, quas hæc æquatio, denotanti-
bus litteris x & y Coordinatas orthogonales, in se complecti-
tur, ad ordinem Linearum secundum numeramus. Sunt igitur
hæ Lineæ curvæ simplicissimæ, quia in ordine primo nulla Linea
curva continetur, & hanc ob rem a quibusdam Lineæ curvæ
primi ordinis vocari solent. Lineæ vero istæ curvæ in hac
æquatione contentæ sub nomine *Sectionum conicarum* vulgo in-
notuerunt, quia eadem omnes ex sectione Coni nascuntur. Di-
versæ harum Linearum species sunt Circulus, Ellipsis, Parabola
& Hyperbola, quas infra ex æquatione generali deducemus.

55. Ad tertium porro Linearum ordinem referuntur omnes
Lineæ curvæ, quas sequens æquatio tertii ordinis generalis
suppeditat.

$$0 = \alpha + \zeta x + \gamma y + \delta x^2 + \epsilon xy + \zeta y^2 + \eta x^3 + \theta x^2 y + \iota xy^2 + \kappa y^3$$

funtis x & y pro Coordinatis orthogonalibus, quia conditio
obliquitatis Applicatarum ampliorem significatum huic æquationi
non inducit, ut jam notavimus. Quia in hac æquatione multo
plures, quam in præcedente habentur litteræ constantes, quas
pro arbitrio definire licet, etiam multo major specierum di-
versarum numerus in hoc ordine continetur, quarum enume-
rationem exhibuit NEWTONUS.

56. Ad quartum Linearum ordinem pertinent omnes Lineæ
curvæ, quas hæc æquatio generalis quarti ordinis exhibet

$$0 = \alpha + \zeta x + \gamma y + \delta x^2 + \epsilon xy + \zeta y^2 + \eta x^3 + \theta x^2 y + \iota xy^2 + \kappa y^3 \\ + \lambda x^4 + \mu x^3 y + \nu x^2 y^2 + \xi xy^3 + \sigma y^4,$$

funtis x & y pro Coordinatis orthogonalibus, quia obliqui-
tas Applicatarum æquationi majorem generalitatem non indu-
cit. Occurrunt ergo in hac æquatione quindecim quantitates
constantes, pro arbitrio definiendæ, unde multo major specie-
rum diversarum varietas in hoc ordine occurrit, quam in præ-
cedente. Lineæ istæ quarti ordinis vocari etiam solent Lineæ

LIB. II. curvæ tertii ordinis, quia Linearum ordo secundus pro Linearum curvarum ordine primo reputatur; similique modo Lineæ tertii ordinis conveniunt cum Lineis curvis secundi ordinis.

57. Ex his jam intelligitur, quænam Lineæ curvæ ad ordinem quintum, sextum, septimum & sequentes pertineant. Æquatio autem generalis omnes Lineas quinti ordinis in se complectens, quia ad æquationem generalem quarti ordinis insuper accedunt termini,

$$x^5; x^4y; x^3y^2; x^2y^3; xy^4; y^5$$

constabit omnino terminis viginti & uno, & æquatio generalis omnes Lineas sexti ordinis continens habebit viginti & octo terminos, & ita porro secundum numeros trigonales. Scilicet æquatio generalis pro Lineis ordinis n continebit $\frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2}$ terminos, totidemque in ea inerunt litteræ constantes, quas pro arbitrio definire licet.

58. Neque vero qualibet litterarum constantium diversa determinatio diversas Lineas curvas producit. Vidimus enim in præcedente Capite pro eadem Linea curva, mutatis Axe & Abscissarum initio, infinitas exhiberi posse æquationes diversas; unde ex diversitate æquationum ad eundem ordinem pertinentium non sequitur Curvarum iis æquationibus indicatarum diversitas. Quam ob rem in enumeratione generum ac specierum ad eundem ordinem pertinentium, quæ ex æquatione generali deducitur, admodum cautum esse oportet, ne eadem Linea curva ad duas pluresve species referatur.

59. Cum igitur ex ordine æquationis, quæ inter Coordinatas datur, Lineæ curvæ ordo cognoscatur, proposita quacunque æquatione algebraïca inter Coordinatas x & y , statim constabit, ad quemnam ordinem Linea curva illa æquatione indicata sit referenda. Primum scilicet æquatio, si sit irrationalis, ab irrationalitate liberari, tumque, si fractiones superfuerint, ab his purgari debet, quo factò maximus dimensionum numerus,

numerus, quem variables x & y in ea constituunt, ordinem, ad quem Linea curva pertinet, indicabit. Sic Linea curva, quam hæc æquatio $yy - ax = 0$ dat, erit ordinis secundi: Linea curva autem in hac æquatione $yy = x\sqrt{aa - xx}$ (quæ ab irrationalitate liberata fit ordinis quarti) contenta erit ordinis quarti. Et Linea curva, quam hæc æquatio præbet

$y = \frac{a^3 - axx}{aa + xx}$, erit ordinis tertii, quia æquatio a fractionibus liberata fit $aa y + xxy = a^3 - axx$, in cujus termino xy tres sunt dimensiones.

60. In una eademque autem æquatione plures Lineæ curvæ diversæ contineri possunt, prout Applicatæ ad Axem vel normales vel sub data obliquitate constitutæ ponuntur. Sic hæc æquatio $yy = aa - xx$, si Coordinatæ ponantur orthogonales, præbet Circulum, sin autem Coordinatæ obliquangulæ statuantur, tum Curva erit Ellipsis. Omnes tamen istæ Curvæ diversæ ad eundem ordinem pertinent, quia reductione Coordinatarum obliquangularum ad rectangulas ordo Curvæ non mutatur. Quanquam ergo æquatio generalis pro Lineis curvis cujusque ordinis ob angulum, quo Applicatæ Axi insistant, neque latius neque minus late patens redditur, tamen proposita æquatione speciali Linea curva in ea contenta non determinatur, nisi angulus quem Coordinatæ inter se constituunt, determinetur.

61. Quo Linea curva ad eum ordinem, quem æquatio indicat, proprie referatur, necesse est, ut æquatio in Factores rationales resolvì nequeat. Si enim æquatio duos pluresve habeat Factores, tum duas pluresve involvet æquationes, quarum quælibet peculiarem Lineam curvam generabit, quæ junctim sumtæ æquationis propositæ vim exhaurient. Hujusmodi ergo æquationes in Factores resolvables non unam sed plures Curvas continuas in se complectuntur, quarum quævis peculiari æquatione exprimi queat; & quæ aliter inter se non sunt connexæ, nisi quod earum æquationes in se mutuo sint multiplicatæ. Qui cum sit nexus ab arbitrio nostro pendens, ejus-

LIB. II. modi Lineæ curvæ non unam continuam Lineam consistere
 — censeferi possunt. Tales ergo æquationes, quas supra complexas vocavimus, producent Lineas curvas non continuas, at tamen ex continuis compositas, quas propterea complexas vocabimus.

62. Sic hæc æquatio $yy = ay + xy - ax$, quæ ad Lineam secundi ordinis esse videtur, si ad nihilum reducat, ut sit $yy - ay - xy + ax = 0$, constabit ex his Factoribus $(y - x)(y - a) = 0$: complectitur ergo has duas æquationes $y - x = 0$ & $y - a = 0$, quarum utraque est pro linea recta, illa scilicet cum Axe in initio Abscissarum angulum semirectum constituit, hæc vero Axi ad distantiam $= a$ est parallela. Dux ergo istæ lineæ rectæ simul consideratæ in æquatione proposita $yy = ay + xy - ax$ continentur. Simili modo hæc æquatio est complexa $y^4 - xy^3 - aaxx - ay^3 + axxy + aaxy = 0$ neque propterea Lineam continuam quarti ordinis exhibet, cum enim Factores sint $(y - x)(y - a)(yy - ax)$ tres continebit lineas discretas, duas scilicet rectas & unam Curvam in æquatione $yy - ax = 0$ contentam.

63. Possunt ergo pro lubitu Lineæ complexæ quæcunque formari, quæ complectantur duas pluresve Lineas sive rectas sive curvas ad arbitrium descriptas. Quod si enim unius cujusque Lineæ natura exprimat per æquationem ad eundem Axem idemque Abscissarum initium relatam, hæcque æquationes singulæ, postquam ad cyphram fuerint reductæ, in se multiplicentur, prodibit æquatio complexa, in qua omnes Lineæ assumptæ simul continentur. Ita, si propositus fuerit Circulus centro C & Radio $CA = a$ descriptus, ac præterea Linea recta LN per Centrum C transiens, æquatio pro quovis Axe exhiberi poterit, quæ Circulum & Lineam rectam, quasi atambo unam Lineam constituerent, conjunctim complectatur.

64. Sumatur diameter AB , quæ cum recta LN angulum semirectum constituat pro Axe, ac sumto initio Abscissarum in A , vocatisque Abscissa $AP = x$, & Applicata $PM = y$, erit pro Linea recta $PM = CP = a - x$, & quia punctum
 rect

rectæ M in regionem Applicatarum negativarum cadit, erit CAP. III.
 $y = -a + x$, seu $y - x + a = 0$. Pro Circulo autem cum
 fit $PM^2 = AP \cdot PB$, ob $BP = 2a - x$, erit $yy = 2ax - xx$
 seu $yy + xx - 2ax = 0$. Multiplicentur jam hæ duæ æqua-
 tiones in se invicem ac prodibit æquatio tertii ordinis com-
 plexa

$$y^3 - y^2x + yxx - x^3 + ayy - 2axy + 3axx - 2aax = 0,$$

quæ tam Circulum quam lineam rectam simul in se complectetur. Absciffæ scilicet $AP = x$ respondere invenientur tres Ap-
 plicatæ, binæ Circuli & una rectæ: fit nimirum $x = \frac{1}{2}a$, fiet

$$y^3 + \frac{1}{2}ay^2 - \frac{3}{4}aay - \frac{3}{8}a^3 = 0, \text{ unde fit primo } y + \frac{1}{2}a = 0$$

tum divisione per hanc radicem instituta erit $yy - \frac{3}{4}aa = 0$, unde tres valores ipsius y erunt.

- I. $y = -\frac{1}{2}a$;
- II. $y = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$;
- III. $y = -\frac{1}{2}a\sqrt{3}$.

Quasi ergo Circulus cum recta LN unum continuum constituerit, ita in æquatione repræsentatur.

65. Notato hoc discrimine inter Curvas incomplexas & complexas, perspicuum est Lineas secundi ordinis vel esse Curvas continuas, vel ex duabus Lineis rectis complexas; si enim æquatio generalis habet Factores, hi erunt primi ordinis, ideoque Lineas rectas denotabunt. Lineæ autem tertii ordinis erunt vel incomplexæ, vel ex una recta & una Linea secundi ordinis complexæ, vel ex tribus Lineis rectis complexæ. Porro Lineæ quarti ordinis erunt vel continuæ seu incomplexæ, vel ex una Linea recta & una Linea tertii ordinis complexæ, vel ex dua-
bus

LIB. II. bus Lineis secundi ordinis complexæ, vel ex Linea secundi ordinis una & duabus rectis vel denique ex quatuor Lineis rectis complexæ erunt. Similiter ratio Linearum complexarum ordinis quinti altiorumque ordinum est comparata parique modo enumerari poterit. Ex quo patet in quovis Linearum ordine simul omnes Lineas ordinum inferiorum comprehendendi, neque vero simpliciter, sed quælibet ordinum inferiorum complexa cum Linea vel Lineis rectis, vel cum Lineis secundi, tertii, sequentiumve ordinum, ita tamen, ut si numeri singulorum ordinum ad quos Lineæ simplices pertinent in unam summam addantur, prodeat numerus, quo ordo Lineæ complexæ indicatur.

C A P U T I V.

De Linearum cujusque ordinis præcipuis proprietatibus.

66. **I**Nter præcipuas proprietates Linearum cujusque ordinis primum locum tenet earum concursus cum Linea recta, seu intersectionum multitudo, quas Linea recta cum Lineis cujusque ordinis facere potest. Cum enim Linea primi ordinis, seu recta, ab alia Linea recta nonnisi in unico puncto secari possit, Lineæ curvæ autem in pluribus punctis a Linea recta secari queant; merito ergo quæri solet in quot punctis Linea curva cujusque ordinis secari possit a Linea recta utcumque ducta: ex ipsa enim hac quæstione natura Linearum curvarum ad varios ordines pertinentium melius cognoscetur. Reperietur autem Linea secundi ordinis a recta in pluribus quam duobus punctis secari non posse: Linea autem tertii ordinis a recta in pluribus quam tribus punctis secari nequit, & ita porro.

67. Supra jam mentionem fecimus modi, quo determinari potest in quot punctis Axis cujusque Curvæ ab ipsa Curva secetur. Data enim æquatione inter Abscissam x & Applicatam

catam y , quia ubi Curvæ punctum in Axem incidit, ibi Ap- CAP. IV.
 plicata y fit $= 0$, ponatur in æquatione $y = 0$, atque æquatio
 resultans, quæ tantum x continebit, monstrabit valores ipsius TAB. IV.
 x , hincque Axis puncta, ubi Curva ipsum secabit. Ita in æ- Fig. 16.
 quatione pro Circulo, quam supra invenimus, $yy = 2ax -$
 xx , si ponamus $y = 0$, fit $0 = 2ax - xx$, unde duo valo-
 res ipsius x resultant, $x = 0$ & $x = 2a$, qui indicant Axem
 RS primo in ipso Abscissarum initio A , tum vero in puncto
 B , existente $AB = 2a$, a Circulo interfecari. Similique modo
 in aliis Lineis curvis, posito in æquatione $y = 0$, radices ipsius
 x indicabunt intersectiones Curvæ cum Axe.

68. Quoniam in æquatione generali pro quavis Curva, Li-
 nea recta quæcunque vicem Axis sustinet, si in æquatione ge-
 nerali ponatur Applicata $y = 0$, æquatio remanens indicabit
 in quot punctis Linea curva a recta quæcunque trajiciatur. Pro-
 dibit autem æquatio Abscissam solam x , tanquam incognitam,
 complectens, cujus singulæ radices ostendent intersectiones Cur-
 væ cum Axe. Pendebit ergo intersectionum numerus a ma-
 xima ipsius x in æquatione potestate, hincque major esse non
 poterit quam exponens summæ ipsius x potestatis. Tot vero
 erunt intersectiones, quot exponens maximæ potestatis ipsius
 x continet unitates, si omnes radices æquationis fuerint reales,
 sin autem aliquot radices fuerint imaginariæ, intersectionum
 numerus tanto erit minor.

69. Cum igitur pro quovis Linearum ordine æquationes ge-
 neralissimas exhibuerimus; ex iis, modo exposito, invenire
 poterimus, in quot punctis Lineæ cujusque ordinis a recta qua-
 cunque secari queant. Sumamus ergo æquationem pro Lineis
 primi ordinis seu pro Linea recta generalem, $0 = a + \epsilon x +$
 γy , ex qua, posito $y = 0$, fit $0 = a + \epsilon x$, quæ æquatio
 plus una radice habere nequit, unde patet Lineam rectam ab
 alia recta in unico puncto secari. Sin autem sit $\epsilon = 0$, æquatio
 $0 = a$ impossibilis indicat hoc casu Axem a Linea recta nus-
 quam secari, erunt enim ambæ hæ Lineæ rectæ inter se parallelæ,
 uti patet ex æquatione $0 = a + \gamma y$, quæ oritur si $\epsilon = 0$.

LIB. II. 70. Si in æquatione generali pro Lineis secundi ordinis

$$0 = \alpha + \epsilon x + \gamma y + \delta x x + \epsilon x y + \zeta y y$$

ponamus $y = 0$, prodibit hæc æquatio

$$0 = \alpha + \epsilon x + \delta x x,$$

quæ æquatio vel duas habet radices reales, vel nullam, vel etiam unicam si $\delta = 0$. Hinc Linea secundi ordinis a Linea recta vel in duobus punctis secabitur, vel in unico, vel nusquam. Qui casus omnes sic in unum comprehendi possunt, ut dicamus Lineam secundi ordinis a Linea recta plusquam in duobus punctis secari non posse.

71. Si in æquatione generali pro Lineis tertii ordinis ponamus $y = 0$, prodibit hujusmodi æquatio

$$0 = \alpha + \epsilon x + \gamma x x + \delta x^3,$$

quæ cum plures tribus radicibus habere nequeat, perspicuum est Lineas tertii ordinis a Linea recta in pluribus quam tribus punctis secari non posse. Fieri vero potest ut Linea tertii ordinis a Linea recta in paucioribus punctis secetur, nempe vel in duobus, si $\delta = 0$, & æquationis $0 = \alpha + \epsilon x + \gamma x x$ ambæ radices fuerint reales; vel in unico si superioris æquationis duæ radices fuerint imaginariæ, aut si sit & $\delta = 0$ & $\gamma = 0$; vel etiam nusquam si $\delta = 0$ & reliquæ æquationis ambæ radices fuerint imaginariæ, quod idem evenit si ϵ , γ , & δ evanescant, at α fuerit quantitas non æqualis nihilo.

72. Simili modo colligetur Lineas quarti ordinis a recta in pluribus quam quatuor punctis secari non posse; hæcque proprietates ad omnes Linearum ordines ita extenduntur, ut Lineæ ordinis n a Linea recta in pluribus quam n punctis secari nequeant. Neque vero hinc sequitur omnem Lineam ordinis n a quavis Linea recta in n punctis secari, sed utique fieri potest ut numerus intersectionum sit minor, imo subinde prorsus nullus, uti de Lineis secundi & tertii ordinis annotavimus. In

hoc

hoc ergo tantum propositionis vis est posita, quod interfectionum numerus major nunquam esse possit, quam exponens ordinis ad quem Linea curva refertur.

73. Ex numero igitur interfectionum, quas Linea recta quæcunque cum data Linea curva facit, ordo ad quem Linea curva pertineat, definiri non poterit. Si enim interfectionum numerus sit $= n$, non sequitur Curvam ad ordinem Linearum n pertinere, sed ad quemvis ordinem superiorem æque referri poterit: quin etiam fieri potest ut Curva ne quidem sit algebraïca sed transcendens. Excludendo autem semper tuto affirmari potest, Lineam curvam, quæ a recta in n punctis secetur, ad nullum Linearum ordinem inferiorem pertinere posse. Sic, si proposita Linea curva a recta in quatuor punctis secetur, certum est, eam neque ad ordinem secundum, neque tertium referri; utrum autem in ordine quarto, aut superiori quopiam contineatur, an sit transcendens, hinc dijudicari non potest.

74. Æquationes generales, quas pro Lineis cujusque ordinis exhibuimus, plures continent quantitates constantes arbitrarias, quibus si valores determinati tribuantur, Lineæ curvæ penitus deteri inabuntur, atque ad datum Axem ita describentur, ut reliquæ Lineæ curvæ omnes, quæ quidem in eadem æquatione generali continebantur, excludantur. Ita, quamvis in æquatione primi ordinis $0 = a + \epsilon x + \gamma y$ sola Linea recta contineatur; tamen ejus posito respectu Axis infinitis modis variari potest, pro diversis infinitis valoribus quantitarum constantium a, ϵ, γ . Quamprimum autem his quantitatibus constantibus definiti valores tribuuntur, positio Lineæ rectæ determinatur, ut præter hanc nulla alia æquationi satisfacere queat.

75. Hæc igitur æquatio $0 = a + \epsilon x + \gamma y$ tres determinationes admittere videri posset, ob tres constantes arbitrarias $a, \epsilon, \& \gamma$. Verum ex natura æquationum intelligitur æquationem jam determinari, si tantum ratio inter has constantes definiatur, scilicet ratio binarum ad unam; ex quo ista æquatio duas tantum admittet determinationes. Si enim ϵ & γ

LIB. II. per α ita determinantur ut sit $\zeta = -\alpha$ & $\gamma = 2\alpha$, æquatio
 $0 = \alpha - \alpha x + 2\alpha y$, quia α per divisionem exit, jam profus
 erit determinata. Similem ob rationem æquatio generalis pro
 Lineis secundi ordinis, quæ sex continet constantes arbitrarias,
 quinque tantum admittit determinationes, æquatio generalis
 pro Lineis tertii ordinis novem; & generaliter æquatio generalis
 pro Lineis ordinis n patietur $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1$ deter-
 minationes.

76. Semper autem istæ constantes arbitrariæ ita defini ri pos-
 sunt ut Linea curva per datum punctum transeat, hocque
 TAB. IV. modo una determinatio orietur. Sit enim proposita æquatio
 Fig. 17. generalis pro quovis ordine Linearum, quæ ita defini ri debeat,
 ut Linea curva per datum punctum B transeat. Sumto pro lu-
 bitu Axe, in eoque Abscissarum initio A , demittatur ex pun-
 cto B in Axem perpendicularis Bb , atque manifestum est, si
 Curva transeat per punctum B , tum posito intervallo Ab pro
 x , perpendicularem Bb præbere valorem Applicatæ y . Quare
 in æquatione generali proposita, loco x substituatur Ab , &
 Bb loco y , sicque orietur æquatio, ex qua una quantitatium
 constantium $\alpha, \zeta, \gamma, \delta, \epsilon$, &c., defini ri poterit; quo facto
 omnes Curvæ, quæ in æquatione generali hoc modo determi-
 nata continentur, per punctum datum B transibunt.

77. Si Linea curva insuper per punctum C transire debeat,
 inde ad Axem perpendiculo Cc demisso, & in æquatione po-
 sito $x = Ac$ & $y = Cc$, nova orietur æquatio ex qua pariter
 una ex quantitatibus constantibus $\alpha, \zeta, \gamma, \delta$, &c., definie-
 tur. Eodem modo intelligitur si tria puncta B, C, D præf-
 cribantur, per quæ Linea curva transire debeat, inde tres con-
 stantes defini ri; ex quatuor autem punctis B, C, D, E qua-
 tuor litteras constantes determinationem accipere. Quod si ergo
 tot puncta, per quæ Linea curva transeat, proponantur quot
 determinationes æquatio generalis admittit, tum Linea curva
 penitus erit determinata, ideoque unica, quæ quidem per om-
 nia puncta proposita transeat.

78. Cum

78. Cum igitur æquatio generalis pro Lineis primi ordinis, seu pro Linea recta, duas tantum determinationes admittat, propositis duobus punctis, per quæ Linea primi ordinis, seu recta, transeat, Linea recta penitus determinatur; neque per duo puncta data plures quam una Linea recta duci poterunt, quod quidem ex Elementis intelligitur. Sin autem unum tantum proponeretur punctum, tum, ob æquationem nondum determinatam, adhuc infinitæ Lineæ rectæ per idem punctum duci possunt.

79. Æquatio generalis pro Lineis secundi ordinis quinque admittit determinationes; unde si quinque proponantur puncta, per quæ Linea curva transire debeat, Linea secundi ordinis penitus determinatur. Hanc ob rem per quinque data puncta unica Linea secundi ordinis duci potest; sin autem quatuor tantum vel pauciora puncta proponantur, quia iis æquatio nondum penitus determinatur, innumerabiles Lineæ, quæ omnes sint ordinis secundi per ea duci poterunt. Quod si autem quinque illorum punctorum tria in directum jaceant, quia Linea secundi ordinis a recta in tribus punctis secari nequit, nulla Linea curva continua reperietur, sed prodibit Linea complexa, duæ nempe Lineæ rectæ, quæ, uti jam monuimus, in æquatione generali secundi ordinis continentur.

80. Quia porro æquatio generalis pro Lineis tertii ordinis novem determinationes admittit, per novem puncta pro libitu assumpta Linea tertii ordinis semper duci poterit, atque unica. Sin autem numerus punctorum novenario fuerit minor, tum per ea innumerabiles Lineæ tertii ordinis duci poterunt. Simili modo per quatuordecim puncta data unica Linea quarti ordinis, per viginti puncta unica Linea quinti ordinis duci poterit, & ita porro. Atque in genere Lineæ ordinis n determinabuntur per tot puncta quot hæc formula $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ —

$x = \frac{n(n+3)}{2}$ continet unitates; ita ut, si numerus pun-

LIB. II. ∞ torum datorum fuerit minor, per ea puncta innumerabiles Lineæ ordinis n duci queant.

81. Nisi ergo plura puncta, quam $\frac{n(n+3)}{2}$, proponantur, semper una vel infinitæ Lineæ ordinis n per ea duci poterunt: unica scilicet, si numerus punctorum datorum fuerit $= \frac{n(n+3)}{2}$, & infinitæ, si sit minor. Nunquam autem, utcumque hæc puncta fuerint disposita, solutio evadet impossibilis; determinatio enim coefficientium α , ϵ , γ , δ , &c., nunquam resolutionem æquationis quadraticæ vel altioris potestatis requirit, sed tota per æquationes simplices absolvitur. Ex quo neque unquam valores imaginarii pro quantitibus α , ϵ , γ , &c., reperientur, neque valores multiformes; hancque ob causam semper Linea realis per proposita puncta transiens prodibit; atque unica, si quidem tot puncta proponantur, quot determinationes æquatio generalis admittit.

82. Quoniam Axis pro lubitu assumi potest, ista coefficientium determinatio facilius fiet, si Axis per unum punctorum datorum ducatur, atque initium Abscissarum in ipso hoc puncto A statuatur; sic enim posito $x=0$ fieri debet $y=0$, unde in æquatione generali proposita

$$0 = \alpha + \epsilon x + \gamma y + \delta x^2 + \epsilon x y + \xi y^2 + \eta x^3 + \&c.,$$

statim fit $\alpha = 0$. Deinde Axis quoque per aliud punctum datorum transire poterit, quo pacto numerus quantitarum, quibus positio punctorum datorum definitur, minuetur. Denique, loco Applicatarum orthogonalium ejusmodi obliquangulæ eligi possunt, ut Applicata in initio Abscissarum ducta pariter per punctum datum transeat. Curvæ enim cognitio & constructio ex æquatione æque facile deducitur, sive Applicatæ orthogonales sive obliquangulæ stuantur.

TAB. IV. 83. Si quærat^r Linea secundi ordinis quæ per quinque data puncta A , B , C , D , & E transeat, ducatur Axis per duo puncta

puncta *A, B*: sumaturque initium Abscissarum in altero puncto *A*. Tum jungatur hoc punctum *A* cum tertio *C*, sumaturque angulus *CAB* pro obliquitate Applicatarum. Quare ex reliquis punctis *D & E* ad Axem ducantur Applicatæ *Dd & Ee* illi *AC* parallelæ. Ponatur *AB = a; AC = b; Ad = c; Dd = d; Ae = e, & eE = f*; atque sumta æquatione generali Linearum secundi ordinis

$$0 = a + \zeta x + \gamma y + dx^2 + \epsilon xy + \zeta y^2$$

posito	manifestum est	fore
$x = 0$		$y = 0$
$x = 0$		$y = b$
$x = a$		$y = 0$
$x = c$		$y = d$
$x = e$		$y = f$

Hinc orientur sequentes quinque æquationes

- I. $0 = a$
- II. $0 = a + \gamma b + \zeta b^2$
- III. $0 = a + \zeta a + da^2$
- IV. $0 = a + \zeta c + \gamma d + dc^2 + \epsilon cd + \zeta d^2$
- V. $0 = a + \zeta e + \gamma f + de^2 + \epsilon ef + \zeta f^2$

Erit ergo $a = 0; \gamma = -\zeta b; \zeta = -da$, qui valores in reliquis substituti dant

$$0 = -dac - \zeta bd + dcc + \epsilon cd + \zeta dd$$

$$0 = -dae - \zeta bf + dee + \epsilon ef + \zeta ff$$

multiplicentur superior per *ef* & inferior per *cd* & altera ab altera subtrahatur, ut eliminetur ϵ , ac proveniet

$$0 = -dacef - \zeta bdef + dccef + \zeta ddef$$

$$+ dacde + \zeta bcdf - dcdte - \zeta cdf$$

seu

$\frac{d}{\zeta}$

LIB. II.

$$\frac{\mathcal{D}}{\zeta} = \frac{bdef - bcdf - ddef + cdff}{acde - acef - cdee + ccef},$$

unde fit

$$\mathcal{D} = df(be - bc - de + cf)$$

$$\zeta = ce(ad - af - de + cf)$$

hincque omnes coëfficientes determinabuntur.

84. Determinatis autem hoc modo omnibus coëfficientibus æquationis generalis $0 = a + Cx + \gamma y + \mathcal{D}x^2 + \&c.$, super Axe assumto & sub constituta Applicatarum obliquitate, Linea curva describetur per puncta infinita per æquationem inveniendâ, hæcque Linea curva transibit per omnia puncta proposita. Si æquatio generalis plures admittat determinationes quam fuerint puncta proposita, tum reliquis pro lubitu assumtis Linea curva per singula puncta data describetur ope æquationis omnino determinatæ. Tribuuntur autem Abscissæ x successive plures valores tam affirmativi quam negativi ut $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \&c.$, & $-1, -2, -3, -4, \&c.$, ac pro singulis ex æquatione investigantur valores Applicatæ y convenientes, sicque plurima innotescunt puncta satis vicina, per quæ Curva transibit, ex quibus proinde tractus Curvæ facile perspicietur.

CAPUT V.

CAP. V.

De Lineis secundi Ordinis.

85. **Q**uia in Linearum ordine primo sola Linea recta continetur cujus indoles jam satis ex Geometria elementari constat, Lineas SECUNDI ORDINIS aliquanto diligentius contemplemur, quod eæ inter omnes Lineas curvas sint simplicissimæ, atque per totam Geometriam sublimiorem usum habeant amplissimum. Præditæ autem sunt istæ Lineæ, quæ etiam SECTIONES CONICÆ vocantur, plurimis insignibus proprietatibus, quas cum antiquissimi Geometræ eruerunt, tum recentiores amplificaverunt. Harumque proprietatum cognitio adeo necessaria judicatur, ut a plerisque Auctoribus statim post Geometriam elementarem explicari soleant. Quoniam vero istæ proprietates omnes non ex uno principio derivari possunt, sed alias æquatio patefecit, alias generatio ex Sectione Coni, alias denique alii describendi modi, hic tantum eas proprietates investigabimus, quas æquatio sola sine aliis subsidiis suppeditat.

86. Consideremus ergo æquationem generalem pro Lineis secundi ordinis, quæ est

$$0 = \alpha + \zeta x + \gamma y + \delta x^2 + \epsilon xy + \zeta y y,$$

quam æquationem ita comparatam esse ostendimus, ut, quocumque angulo Applicatæ ad Axem inclinatæ statuantur, ea tamen semper omnes Lineas secundi Ordinis in se complectatur. Tribuatur jam isti æquationi hæc forma

$$\gamma y + \frac{(\epsilon x + \gamma)y}{\zeta} + \frac{\delta x x + \zeta x + \alpha}{\zeta} = 0,$$

ex qua patet cuicque Abscissæ x respondere vel duas Applicatæ Euleri *Introduct. in Anal. infin. Tom. II.* F ras

L I B. II. tas y , vel nullam, prout binæ radices ipsius y fuerint vel reales vel inaginarix. Quod si autem fuerit $\zeta = 0$ tum unica quidem Applicata singulis Abscissis respondebit, altera abeunte in infinitum, quam ob rem iste casus nostram indagacionem non turbabit.

TAB. V.
Fig. 19.

87. Quoties autem ambo ipsius y valores fuerint reales; id quod evenit, si Applicata PMN Curvam in duobus punctis M & N intersecat, erit summa radicum $PM + PN = \frac{\varepsilon x - \gamma}{\zeta} = \frac{\varepsilon \cdot AP - \gamma}{\zeta}$, sumta recta AEF pro Axc, A pro initio Abscissarum, & angulo APN , quo Applicatæ Axi insistant, posito obliquo pro lubitu. Quod si ergo sub eodem angulo ducatur quævis alia Applicata npm , cujus quidem valor pm est negativus, erit eodem modo $pn - pm = \frac{\varepsilon \cdot Ap - \gamma}{\zeta}$. Subtrahatur hæc æquatio a priori, erit $PM + pm + PN - pn = \frac{\varepsilon (Ap - AP)}{\zeta} = \frac{\varepsilon \cdot Pp}{\zeta}$. Ducantur ex punctis m & n rectæ Axi parallelæ, donec priori Applicatæ occurrant in punctis μ & ν , eritque $M\mu + N\nu = \frac{\varepsilon \cdot Pp}{\zeta}$, seu summa $M\mu + N\nu$ ad Pp seu $m\mu$ seu $n\nu$ rationem habebit constantem ut ε ad ζ . Ratio scilicet hæc perpetuo erit eadem, ubicunque in Curva ducantur rectæ MN & mn , dummodo cum Axe datum faciant angulum, atque rectæ $n\nu$ & $m\mu$ Axi parallelæ ducantur.

TAB. V.
Fig. 20.

88. Si Applicata PMN eo promoveatur, quo puncta M & N coincidunt, tum Applicata tanget Curvam; ubi enim duæ intersectiones conveniunt, ibi Linea secans abit in tangentem. Sit igitur KCI ejusmodi tangens, cui ducantur parallelæ quocunque rectæ MN , mn , Curvæ utrinque occurrentes, cujusmodi rectæ vocari solent CHORDÆ & ORDINATÆ. Tum ex punctis M , N , m , n ad tangentem producantur rectæ MI , NK ; & mi , nk Axi prius assumpto parallelæ. Quia nunc intervalla CK , Ck ad contrariam puncti C partem cadunt, negative

negative capi debebunt. Hinc erit $CI - CK : MI = \varepsilon : \zeta$ CAP. V.
 & $Ci - Ck : mi = \varepsilon : \zeta$; ideoque $CI - CK : MI = \frac{mi}{Ci - Ck}$
 $Ci - Ck : mi$ seu $MI : mi = CI - CK : Ci - Ck$.

89. Quia positio Axis respectu Curvæ est arbitraria, rectæ MI , NK , mi , nk pro lubitu duci poterunt, dummodo inter se fuerint parallelæ: eritque semper $MI : mi = CI - CK : Ci - Ck$. Quod si ergo rectæ parallelæ MI & NK ita ducantur ut fiat $CI = CK$; quod evenit si parallelæ MI & NK statuatur rectæ CL , quæ ex contactu C ducta Ordinatum MN in L bifecat: tum, ob $CI - CK = 0$, fiet quodque $Ci - Ck = \frac{mi}{MI} (CI - CK) = 0$. Quare producta

recta CL in l , quia, ob mi & nk pariter ipsi CL parallelas, est $ml = Ci$ & $nl = Ck$, erit $ml = nl$. Unde sequitur rectam CLl , quæ ex puncto contactus C ducta unam Ordinatum MN tangenti parallelam bifecat, eandem omnes Ordinatam mn eidem tangenti parallelas bifariam secare.

90. Cum igitur recta CLl omnes Ordinatam tangenti ICK parallelas in duas partes æquales secet, hæc Linea CLl vocari solet DIAMETER Lineæ secundi ordinis seu Sectionis conicæ. Hinc innumerabiles in unaquaque Linea secundi Ordinis duci possunt Diametri, quia in singulis punctis Curvæ datur tangens. Ubicumque enim data fuerit tangens ICK , ducatur una quævis Ordinatum MN hinc tangenti parallela, qua in L bifecta, erit recta CL Diameter Lineæ secundi ordinis, omnes Ordinatam tangenti IK parallelas bifariam secans.

91. Ex his etiam sequitur, si recta Ll duas quævis parallelas Ordinatam MN & mn bifecat, eandem esse omnes reliquas Ordinatam illis parallelas bifecturam: dabitur enim alicubi recta Curvam tangens IK his Ordinatam parallela, ideoque dabitur Diameter. Hinc nova habetur methodus in data Linea secundi ordinis innumerabiles Diametros inveniendi; ducantur enim pro lubitu duæ Ordinatum seu Chordæ MN & mn inter se parallelæ, quibus bifectis in L & l , recta per hæc puncta ducta omnes reliquas Ordinatam illis parallelas pariter bifecabit, eritque

LIB. II. propterea Diameter. Atque ubi Diameter producta Curvam
 ——— secat in C , per id recta IK Ordinatis parallela ducta Curvam
 in puncto C tanget.

TAB. V. 92. Ad hanc proprietatem nos manuduxit consideratio sum-
 Fig. 19. mæ binarum radicum ipsius y ex æquatione

$$yy + \frac{(\varepsilon x + \gamma)}{\zeta} y + \frac{\delta xx + \zeta x + \alpha}{\zeta} = 0.$$

Ex eadem vero æquatione constat fore productum ambarum
 radicum $PM.PN = \frac{\delta xx + \zeta x + \gamma}{\zeta}$, quæ expressio $\frac{\delta xx + \zeta x + \gamma}{\zeta}$
 vel duos Factores habet simplices reales vel secus. Illud eve-
 nit si Axis Curvam in duobus punctis E & F secet, quia enim
 his in locis fit $y = 0$, erit $\frac{\delta xx + \zeta x + \alpha}{\zeta} = 0$, hincque ra-
 dices ipsius x erunt AE & AF , atque adeo Factores $(x -$
 $AE)(x - AF)$ ita ut sit $\frac{\delta xx + \zeta x + \alpha}{\zeta} = \frac{\delta}{\zeta}(x - AE)$
 $(x - AF) = \frac{\delta}{\zeta}.PE.PF$ ob $x = AP$. Hanc ob rem
 ergo erit $PM.PN = \frac{\delta}{\zeta}.PE.PF$: seu rectangulum $PM.$
 PN ad rectangulum $PE.PF$ constantem habebit rationem ut
 δ ad ζ ubicunque Applicata PMN ducatur, dummodo sit an-
 gulus NPF assumto, quo Applicatæ ad Axem inclinari po-
 nuntur, æqualis. Erit ergo simili modo, si ducatur Applicata
 mn ob Ep & pm negativas $pm.pn = \frac{\delta}{\zeta} pE.pF$.

TAB. V. 93. Ducta ergo recta quacunque PEF Lineam secundi or-
 Fig. 21. dinis secante in duobus punctis E, F , si ad eam parallelæ du-
 cantur Ordinatæ quotcunque NMP, npm , erit semper $PM.$
 $PN: PE.PF = pm.pn: pE.pF$, utraque enim hujus pro-
 portionis ratio æquatur $\delta: \zeta$. Simili modo si, quia Axis po-
 sitio est arbitraria, recta PMN sumatur pro Axe, atque ipsi
 PEF alia quæcunque parallela ducatur egf , erit quoque $PM.$
 $PN:$

$PN: PE.PF = qM. qN: qe: qf = pm. pn: pE. pF$. Ergo CAP. V.
 alternando $qe. qf. pE. pF = qM. qN: pm. pn$. Datis igitur
 duabus Ordinatis parallelis ef & EF , si aliæ quæcunque
 duæ Ordinatæ inter se parallelæ MN & mn ducantur, illas se-
 cantes in punctis P, p, q, r , erunt hæ rationes omnes inter
 se æquales. $PM.PN: PE.PF = pm. pn: pE. pF = qM.$
 $qN: qe. qf = rm. rn: re. rf$. Quæ est altera proprietas gene-
 ralis Linearum secundi ordinis.

94. Si igitur duo Curvæ puncta M & N coincidunt, recta TAB. VI.
 PMN fiet Curvæ tangens in concursu illorum duorum pun- Fig. 24.
 ctorum, abibitque rectangulum $PM. PN$ in quadratum ipsius
 PM vel PN , unde nova tangentium proprietas obtinebitur.
 Tangat nimirum recta CPp Lineam secundi ordinis in puncto
 C , & ducantur lineæ quotvis PMN, pmn inter se parallelæ,
 quæ ergo omnes cum tangente eundem angulum constituent.
 Ex proprietate igitur ante inventa erit

$$PC^2: PM. PN = pC^2: pm. pn,$$

feu quæcunque Ordinata MN ad tangentem sub angulo dato
 ducatur, erit semper quadratum rectæ CP ad rectangulum $PM \times$
 PN in ratione constante.

95. Indidem etiam sequitur, si Lineæ secundi ordinis ducatur TAB. V.
 Diameter quæcunque CD , omnes Ordinatas MN, mn Fig. 20.
 inter se parallelas bifariam secans, atque ipsa Diameter Curvæ
 occurrat in punctis duobus C & D , fore

$$CL.LD: LM.LN = Cl.lD: lm.ln.$$

Cum autem sit $LM = LN$, & $lm = ln$, erit $LM^2: lm^2 =$
 $CL.LD: Cl.lD$, seu perpetuo erit quadratum semiordinatæ
 LM ad rectangulum $CL.LD$ in ratione constante. Hinc
 sumta Diametro CD pro Axe, & semiordinatis LM pro
 Applicatis, reperietur æquatio pro Lineis secundi ordinis. Sit
 enim Diameter $CD = a$, Abscissa $CL = x$ & Applicata
 $LM = y$, ob $LD = a - x$ erit, y^2 ad $ax - xx$ in ratione
 F 3 constante

LIB. II. constante, quæ sit ut b ad k , unde orietur ista pro Lineis secundi ordinis æquatio $yy = \frac{b}{k} (ax - xx)$.

TAB. V. 96. Ex ambabus autem jam inventis Linearum secundi Ordinis proprietatibus conjunctim aliæ erui poterunt proprietates. Fig. 22. Dentur in Linea secundi ordinis duæ Ordinatæ inter se parallelæ AB & CD , & compleatur quadrilaterum $ACDB$, quod si jam per punctum quodcunque Curvæ M ducatur Ordinata MN illis AB & CD parallela secans rectas AC & BD in punctis P & Q , erunt partes PM & QN inter se æquales. Nam recta, quæ bifecat Ordinatas duas AB & CD inter se parallelas, bifecabit quoque Ordinatam MN : at, per Geometriam elementarem, eadem recta bifecans latera AB & CD quoque bifecabit portionem PQ . Cum igitur lineæ MN & PQ in eodem puncto bifecentur, necesse est ut sit $MP = NQ$ & $MQ = NP$. Dato ergo, præter quatuor Lineæ secundi ordinis puncta A , B , C , & D , quinto M ex eo reperietur sextum N , sumto $NQ = MP$.

97. Cum jam sit MQ QN ad BQ DQ in ratione constante, ob $QN = MP$ erit quoque MP . MQ ad BQ DQ in eadem ratione constante. Scilicet, si aliud quodcunque Curvæ punctum, uti c , sumatur, & per id recta GcH ipsis AB , & CD parallela ducatur donec lateribus AC , BD occurrat in punctis G & H , erit quoque cG . cH ad BH . DH in eadem ratione constante, ideoque cG . cH : BH . DH = MP . MQ : BQ . DQ . Quod si autem per M basi BD parallelæ ducatur RMS Ordinatis parallelis AB , CD occurrens in R & S , erit, ob $BQ = MR$ & $DQ = MS$, hæc quoque ratio MP . MQ : MR . MS constans. Si igitur per quodvis Curvæ punctum M duæ ducantur rectæ, altera MPQ lateribus oppositis AB , CD parallela, altera vero RMS basi BD parallela, intersectiones P , Q , R , & S ita erunt comparatæ, ut sit MP . MQ ad MR . MS in ratione constante.

98. Si loco Ordinatæ CD , quæ posita est ipsi AB parallela, ex puncto D alia quæcunque Dc in ejus locum substituitur,

titnatur, & Chorda Ac jungatur: ita ut nunc rectæ MQ & RMS , ductæ, ut ante, per M lateribus AB & BD parallelæ, latera quadrilateri $ABDc$ secent in punctis p , Q , R & s ; similis proprietas locum habebit. Cum enim sit $MP.MQ: BQ \times DQ = cG.cH: BH.DH$ seu $MP.MQ: MR.MS = cG.cH: BH.DH$, ob rectam RS ipsi BD parallelam & æqualem. Triangula vero similia APp , AGc & DSs , cHD , præbent has proportiones $Pp: AP = Gc: AG$; seu, ob $AP: AG = BQ: BH$, hanc $Pp: BQ = Gc: BH$: altera similitudo dat hanc $DS(MQ): Ss = cH: DH$, quibus conjunctis fit

$$MQ.Pp: MR.Ss = cG.cH: BH.DH, \text{ ob } BQ = MR.$$

Hæc proportio cum superiori collata præbet

$$MP.MQ: MR.MS = Pp.MQ: MR.Ss,$$

unde addendo antecedentes & consequentes fit

$$MP.MQ: MR.MS = Mp.MQ: MR.Ms,$$

ubicunque ergo sumantur puncta c & M in Curva, erit semper ratio $Mp.MQ$ ad $MR.Ms$ eadem, dummodo rectæ MQ & Rs per M ducantur Chordis AB & BD parallelæ. Ex superiore vero proportione sequitur fore $MP: MS = Mp: Ms$. Cum igitur, variato puncto c , tantum puncta p & s mutantur, erit Mp ad Ms in data ratione, utcunque punctum c varietur, dum punctum M fixum servatur.

99. Quod si quatuor quæcunque puncta A, B, C, D in Linea secundi ordinis fuerint data, eaque jungantur rectis, ut habeatur trapezium inscriptum $ABDC$, proprietas Sectionum conicarum latissime patens ex præcedenti deducitur. Scilicet, si ex Curvæ puncto quovis M ad singula trapezii latera sub datis angulis ducantur rectæ MP, MQ, MR & MS , erunt semper rectangula binarum harum linearum ad opposita latera ductarum inter se in data ratione, nempe erit $MP.MQ$

TAB. VI.
Fig. 23.

ad

LIB. II. ad $MR.MS$ in data ratione eadem, ubicunque punctum M in Curva capiatur, dummodo anguli ad $P, Q, R, \& S$ iidem ferventur. Ad hoc ostendendum ducantur per M duæ rectæ Mq & rs , illa lateri AB hæc lateri BD parallela, ac notentur intersectionum cum lateribus trapezii puncta $p, q, r, \& s$: eritque per prius inventum $Mp.Mq$ ad $Mr.Ms$ in data ratione. Propter omnes autem angulos datos datæ erunt rationes $MP : Mp$, $MQ : Mq$, $MR : Mr$, & $MS : Ms$, ex quibus sequitur fore $MP.MQ$ ad $MR.MS$ in data quoque ratione.

TAB. VI. 100. Quoniam supra vidimus, si Ordinatæ parallelæ MN ,
Fig. 24. mn producantur, quoad tangenti cuiusdam CPp occurrant in P & p , fore $PM.PN : CP^2 = pm.pn : Cp^2$. Quare, si puncta L & l notentur, ut sit PL media proportionalis inter PM & PN , pariterque pl media proportionalis inter pm & pn , erit $PL^2 : CP^2 = pl^2 : Cp^2$; ideoque erit $PL : CP = pl : Cp$, unde patet omnia puncta L, l in Linea recta per punctum contactus C transeunte esse sita. Quare, si una Applicata PMN ita secetur in L ut sit $PL^2 = PM.PN$, recta CLD per puncta C & L ducta omnes reliquas Applicatas pmn ita quoque secabit in l ut sit pl media proportionalis inter pm & pn . Vel, si duæ Applicatæ PN & pn ita in punctis L & l secentur, ut sit $PL^2 = PM.PN$ & $pl^2 = pm.pn$ recta per L & l producta per punctum contactus C transibit, atque omnes reliquas Applicatas illis parallelas in eadem ratione secabit.

TAB. VI. 101. His Linearum secundi ordinis proprietatibus, quæ ex
Fig. 25. forma æquationis immediate consequuntur, expositis; progrediamur ad alias magis reconditas investigandas. Sit igitur proposita æquatio pro his Lineis secundi ordinis generalis

$$yy + \frac{(\epsilon x + \gamma)}{\zeta} y + \frac{\delta xx + \epsilon x + \alpha}{\zeta} = 0,$$

ex qua cum cuivis Abscissæ $AP = x$, duplex Applicata y
nempe

nempe PM & PN respondeat, positio Diametri omnes Or- CAP. V.
 dinatas MN bifariam secantis definiri potest. Sit enim IG
 ista Diameter, quæ Ordinatum MN secabit in puncto medio
 L , quod ergo punctum est in Diametro. Ponatur $PL = z$;
 & cum sit $z = \frac{1}{2} PM + \frac{1}{2} PN$, erit $z = \frac{\overline{\varepsilon x} \overline{\gamma}}{2\zeta}$,
 seu $2\zeta z + \varepsilon x + \gamma = 0$, quæ est æquatio positionem Diametri
 IG præbens.

102. Hinc porro longitudo Diametri IG definiri poterit,
 quæ dat loca bina in Curva, ubi puncta M & N coincidunt,
 seu ubi fit $PM = PN$. Ex æquatione vero dantur $PM +$
 $PN = \frac{\overline{\varepsilon x} \overline{\gamma}}{\zeta}$ & $PM \cdot PN = \frac{\delta x x + \zeta x + \alpha}{\zeta}$, unde fit
 $(PM - PN)^2 = (PM + PN)^2 - 4PM \cdot PN =$
 $(\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta^2)xx + 2(\varepsilon\gamma - 2\zeta\zeta)x + (\gamma\gamma - 4\alpha\zeta^2) = 0$, seu

$$xx - \frac{2(2\zeta\zeta - \varepsilon\gamma)}{\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta^2} x + \frac{\gamma\gamma - 4\alpha\zeta^2}{\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta^2} = 0$$
,

cujus æquatio-
 nis propterea radices sunt AK & AH ita ut sit $AK + AH =$
 $\frac{4\zeta\zeta - 2\varepsilon\gamma}{\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta^2}$ & $AK \cdot AH = \frac{\gamma\gamma - 4\alpha\zeta^2}{\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta^2}$: hinc fit $(AH -$
 $AK)^2 = KH^2 = \frac{4(2\zeta\zeta - \varepsilon\gamma)^2 - 4(\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta^2)(\gamma\gamma - 4\alpha\zeta^2)}{(\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta^2)^2}$.

At est $IG^2 = \frac{\varepsilon\varepsilon + 4\zeta\zeta}{4\zeta\zeta} KH^2$, si quidem Applicatæ ad A-
 xem normales statuuntur.

103. Sint istæ Applicatæ, quas hic sumus contemplati, nor-
 males ad Axem AH ; nunc vero hinc quæramus æquationem
 pro Applicatis obliquangulis. Ducatur ergo ex quovis Curvæ
 puncto M ad Axem Applicata obliquangula Mp faciens cum
 Axe angulum MpH , cujus Sinus sit $= \mu$ & Cofinus $= \nu$.
 Sit nova Abscissa $Ap = t$, Applicata $pM = u$, erit $\frac{y}{u} = \mu$
 & $\frac{Pp}{u} = \nu$, unde erit $y = \mu u$ & $x = t + \nu u$, qui valores

LIB. II. in æquatione inter x & y , quæ erat $0 = a + \epsilon x + \gamma y + \delta x x + \epsilon x y + \zeta y y$, substituti præbent

$$0 = a + \epsilon t + \nu \epsilon u + \delta t t + 2\nu \delta t u + \nu \nu \delta u u \\ + \mu \gamma u \quad + \mu \epsilon t u \quad + \mu \nu \epsilon u u \\ + \mu \mu \zeta u u$$

feu

$$x u + \frac{((\mu \epsilon + 2\nu \delta) t + \mu \gamma + \nu \epsilon) u + \delta t t + \epsilon t + a}{\mu \mu \zeta + \mu \nu \epsilon + \nu \nu \delta} = 0.$$

104. Hic ergo iterum quævis Applicata duplicem habebit valorem, nempe pM & pn : quare Ordinarum Mn Diameter ilg pari modo ut ante definitur. Scilicet, bisecta Ordinata Mn in l erit l , punctum in Diametro. Ponatur ergo $pl = v$,

erit $v = \frac{pM + pn}{2} = \frac{(\mu \epsilon + 2\nu \delta)t - \mu \gamma - \nu \epsilon}{2(\mu \mu \zeta + \mu \nu \epsilon + \nu \nu \delta)}$. Demittatur

ex l in Axem AH perpendiculum lq , ac ponatur $Aq = p$,

$ql = q$, erit $\mu = \frac{q}{v}$ & $\nu = \frac{pq}{v} = \frac{p - t}{v}$, unde fit $v =$

$\frac{q}{\mu}$, & $t = p - \nu v = p - \frac{\nu q}{\mu}$. Substituuntur hi valores

in æquatione inter t & v ante inventa, & prodibit $\frac{q}{\mu} =$

$$\frac{\mu \epsilon p - 2\nu \delta p + \nu \epsilon q + 2\nu \nu \delta q}{2\mu \mu \zeta + 2\mu \nu \epsilon + 2\nu \nu \delta} : \mu - \mu \gamma - \nu \epsilon$$

feu

$$(2\mu \mu \zeta + \mu \nu \epsilon) q + (\mu \mu \epsilon + 2\mu \nu \delta) p + \mu \mu \gamma + \mu \nu \epsilon = 0,$$

feu

$$(2\mu \zeta + \nu \epsilon) q + (\mu \epsilon + 2\nu \delta) p + \gamma \mu + \nu \epsilon = 0,$$

qua æquatione positio Diametri ig definitur.

105. Prior Diameter IG , cujus positio per hanc æquationem determinabatur $2\zeta z + \epsilon x + \gamma = 0$, producta cum Axem

concurrat in O , eritque $AO = \frac{\gamma}{\epsilon}$; hinc fit $PO =$

$$\frac{\gamma}{\epsilon} - x, \text{ \& anguli } LOP \text{ tangens erit } = \frac{z}{PO} = \frac{\epsilon z}{\epsilon x + \gamma}$$

$= \frac{\varepsilon}{2\zeta}$, & tangens anguli MLG , sub quo Diameter IG CAP. V.
 Ordinatas MN bifecat erit $= \frac{2\zeta}{\varepsilon}$. Altera vero Diameter ig
 producta Axi occurrat in o , eritque $Ao = \frac{\mu\gamma - v\zeta}{\mu\varepsilon + 2v\delta}$, &
 anguli Aol tangens erit $= \frac{\mu\varepsilon + 2v\delta}{2\mu\zeta + v\varepsilon}$. Cum jam anguli AOL
 tangens sit $= \frac{\varepsilon}{2\zeta}$, ambæ Diametri se mutuo interfecabunt in
 puncto quodam C , facientque angulum $OCo = Aol - AOL$,
 cujus propterea tangens est $= \frac{4v\delta\zeta - v\varepsilon\varepsilon}{4\mu\zeta^2 + 2v\delta\varepsilon + 2v\varepsilon\zeta + \mu\varepsilon\varepsilon}$. An-
 gulus autem, sub quo hæc altera Diameter suas Ordinatas bi-
 fecat, est $Mlo = 180^\circ - lpo - Aol$: hujus propterea tan-
 gens est $= \frac{2\mu\mu\zeta^2 + 2\mu v\varepsilon + 2v v\delta}{\mu\mu\varepsilon + 2\mu v\delta - 2\mu v\zeta - v\varepsilon\varepsilon}$.

106. Inquiramus autem in punctum C , ubi hæc duæ Diami-
 metri se mutuo interfecant: ex quo ad Axem perpendiculum
 CD demittatur, ac vocetur $AD = g$, $CD = h$; eritque
 primo, quod C in Diametro IG extat, $2\zeta h + \varepsilon g + \gamma = 0$.
 Deinde, quia C quoque in Diametro ig reperitur, erit

$$(2\mu\zeta + v\varepsilon)h + (\mu\varepsilon + 2v\delta)g + \mu\gamma + v\zeta = 0.$$

Subtrahatur hinc prior æquatio per μ multiplicata, ac remanebit

$$v\varepsilon h + 2v\delta g + v\zeta = 0, \text{ seu } \varepsilon h + 2\delta g + \zeta = 0.$$

Ex his fit $h = \frac{-\varepsilon g - \zeta}{2\zeta} = \frac{-2\delta g - \zeta}{\varepsilon}$, ideoque

$$(\varepsilon\varepsilon - 4\delta^2)g = 2\zeta\varepsilon - \gamma\varepsilon, \text{ \& } g = \frac{2\zeta\varepsilon - \gamma\varepsilon}{\varepsilon\varepsilon - 4\delta^2} \text{ \& } h =$$

$$\frac{2\gamma\delta - \zeta\varepsilon}{\varepsilon\varepsilon - 4\delta^2}.$$

In quibus determinationibus cum non infint
 quantitates μ & v , a quibus obliquitas Applicatarum $p Mn$
 pendet, manifestum est punctum C idem manere, utcunque
 obliquitas varietur.

LIB. II. 107. Omnes ergo Diametri IG & ig se mutuo in eodem puncto C decussant: quod ergo si semel fuerit inventum, omnes Diametri per id transibunt; ac vicissim omnes rectæ per id ductæ erunt Diametri, quæ omnes Ordinatas sub certo quodam angulo ductas bisecent. Cum igitur hoc punctum in quavis Linea secundi ordinis sit unicum, in eoque omnes Diametri se mutuo decussent, hoc punctum vocari solet **CENTRUM** Sectionis conicæ. Quod ergo ex æquatione inter x & y propofita

$$0 = a + \epsilon x + \gamma y + \delta x x + \epsilon x y + \zeta y y$$

ita invenitur, ut sumta $AD = \frac{2\epsilon\zeta - \gamma\epsilon}{\epsilon\epsilon - 4\delta\zeta}$, capiatur $CD = \frac{2\gamma\delta - \epsilon\epsilon}{\epsilon\epsilon - 4\delta\zeta}$.

108. Supra autem invenimus esse $AK + AH = \frac{4\epsilon\zeta - 2\gamma\epsilon}{\epsilon\epsilon - 4\delta\zeta}$: sunt autem IK & GH perpendiculara ex terminis Diametri IG in Axem demissa; unde perspicitur esse $AD = \frac{AK + AH}{2}$, atque ideo punctum D erit medium inter puncta K & H . Quam ob rem Centrum quoque C in medio Diametri IG erit situm; quod cum de quavis alia Diametro æque valeat, consequens est non solum omnes Diametros se mutuo in eodem puncto C decussare, sed etiam se invicem bifariam secare.

TAB. VII. Fig. 26. 109. Sumamus nunc quamcunque Diametrum AI pro Axe ad quem Ordinatæ MN applicatæ sint sub angulo $APM = \gamma$, cujus Sinus $= m$ & Cosinus $= n$. Ponatur Abscissa $AP = x$ & Applicata $PM = y$, cujus cum duo sint valores æquales alter alterius negativus eorumque adeo summa $= 0$, æquatio generalis pro Linea secundi Ordinis abibit in hanc formam $\gamma y = a + \epsilon x + \gamma x x$; quæ, si ponatur $\gamma = 0$, dabit puncta G & I in Axe, ubi is a Curva trajicitur; æquationis scilicet

licet $xx + \frac{c}{\gamma} x + \frac{a}{\gamma} = 0$ radices erunt $x = AG$ & $x = \frac{CA P. V.}{\gamma}$

AI ; ideoque habebitur $AG + AI = \frac{-c}{\gamma}$, & $AG \cdot AI =$

$\frac{a}{\gamma}$. Cum igitur Centrum C in medio Diametri GI sit po-

situm, facile reperietur Centrum Sectionis conicæ C . Erit enim

$$AC = \frac{AG + AI}{2} = \frac{-c}{2\gamma}.$$

110. Cognito jam Centro Sectionis conicæ C , in Axe

AI , id convenientissime pro initio Abscissarum accipietur.

Statuatur ergo $CP = t$, quia manet $PM = \gamma$, ob $x =$

$AC - CP = \frac{-c}{2\gamma} - t$, prodibit hæc æquatio inter Coor-

dinatas t & y

$$yy = a - \frac{cc}{2\gamma} + \frac{cc}{4\gamma} - ct + ct + \gamma tt$$

feu

$$yy = a - \frac{cc}{4\gamma} + \gamma tt.$$

Posito igitur x loco t , habebitur æquatio generalis pro Lineis

secundi ordinis, sumta Diametro quacunque pro Axe, & Centro

pro Abscissarum initio, quæ, mutata constantium forma, erit

$yy = a - cxx$. Posito ergo $y = 0$ fiet $CG = CI = \sqrt{\frac{a}{c}}$,

ideoque tota Diameter GI erit $= 2\sqrt{\frac{a}{c}}$.

111. Ponatur $x = 0$, ac reperietur Ordinata per Centrum

transiens EF : fiet scilicet $CE = CF = \sqrt{a}$; ideoque tota

Ordinata $EF = 2\sqrt{a}$; quæ, quia per Centrum transit, pari-

ter erit Diameter, cum illa GI angulum faciens $ECG = \gamma$.

Hæc autem altera Diameter EF bifecabit omnes Ordinatæ

priori Diametro GI parallelas; facta enim Abcissa AP ne-

gativa, Applicata aC versus I cadens manebit priori PM

æqualis; & cum eidem sit parallela, puncta ambo M juncta

LIB. II. a Diametro EF . Hæ igitur ambæ Diametri GI & EF ita inter se sunt affectæ, ut altera bisecet omnes Ordinatas alteri parallelas, quam ob reciprocam proprietatem hæ duæ Diametri inter se CONJUGATÆ appellantur. Si igitur in terminis G & I Diametri GI ducantur rectæ alteri Diametro EF parallelæ, tangent hæ Lineam curvam, similique modo si per E & F ducantur rectæ Diametro GI parallelæ ex tangent Curvam in punctis E & F .

112. Ducatur nunc Applicata quævis MQ obliquangula; sitque angulus $AQM = \phi$, ejus Sinus $= \mu$ & Cos. $= \nu$. Ponatur Abscissa $CQ = t$, & Applicata $MQ = u$, eritque in triangulo PMQ ob ang. $PMQ = \phi - q$ ac propterea $\sin. PMQ = \mu n - \nu m$, $y : u : PQ = \mu : m : \mu n - \nu m$ hincque $y = \frac{\mu u}{m}$ & $PQ = \frac{(\mu n - \nu m)u}{m}$, unde $x = t - PQ = t - \frac{(\mu n - \nu m)u}{m}$. Substituuntur hi valores in æquatione superiori $yy = a - 6xx$, seu $yy + 6xx - a = 0$, ac orietur

$$(\mu u + 6(\mu n - \nu m)^2)uu - 26m(\mu n - \nu m)uu + 6m^2u - am^2 = 0,$$

ex qua Applicata u duos obtinet valores QM & $-Qn$ eritque $QM - Qn = \frac{26m(\mu n - \nu m)t}{\mu u + 6(\mu n - \nu m)^2}$. Bisecetur Ordinata Mn in p , eritque recta Cpg nova Diameter secans omnes Ordinatas ipsi Mn parallelas bifariam, eritque $Qp = \frac{6m(\mu n - \nu m)t}{\mu u + 6(\mu n - \nu m)^2}$.

113. Obtinetur autem hinc anguli GCg tangens $= \frac{\mu \cdot Qp}{CQ + \nu \cdot Qp}$, vel $\text{tang. } GCg = \frac{6m(\mu n - \nu m)}{\mu + n6(\mu n - \nu m)}$ & $\text{tang. } Mpg = \frac{\mu \cdot CQ}{pQ + \nu \cdot CQ} = \frac{\mu u + 6(\mu n - \nu m)^2}{\mu \nu + 6(\mu n - \nu m)(\nu n + \mu m)}$, qui est angulus sub quo novæ Ordinatæ Mn a Diametro gi bisecantur. Porro vero erit $Cp^2 = CQ^2 + Qp^2 + 2 \cdot CQ \times Qp =$

$$QP = \frac{\mu^4 + 2\mathfrak{C}\mu^3 n' \mu n - \nu m) + \mathfrak{C}\mathfrak{C}\mu\mu(\mu n - \nu m)^2}{(\mu\mu + \mathfrak{C}(\mu n - \nu m)^2)^2} \text{ et ideoque}$$

$$Cp = \frac{\mu \iota \sqrt{(\mu^2 + 2\mathfrak{C}\mu n(\mu n - \nu m) + \mathfrak{C}\mathfrak{C}(\mu n - \nu m)^2)}}{\mu\mu + \mathfrak{C}(\mu n - \nu m)^2}$$

Ponatur $Cp = r$ & $pM = s$, critique $\iota =$,

$$\frac{(\mu\mu + \mathfrak{C}(\mu n - \nu m)^2)r}{\mu\sqrt{(\mu^2 + 2\mathfrak{C}\mu n(\mu n - \nu m) + \mathfrak{C}\mathfrak{C}(\mu n - \nu m)^2)}} \text{ \& } u = s +$$

$$QP = s + \frac{\mathfrak{C}m(\mu n - \nu m)r}{\mu\sqrt{(\mu^2 + 2\mathfrak{C}\mu n(\mu n - \nu m) + \mathfrak{C}\mathfrak{C}(\mu n - \nu m)^2)}},$$

qui valores porro dant

$$y = \frac{\mu s}{m} + \frac{\mathfrak{C}(\mu n - \nu m)r}{\sqrt{(\dots\dots\dots)}}$$

$$x = \frac{(\mu n - \nu m)s}{m} + \frac{\mu r}{\sqrt{(\dots\dots\dots)}},$$

unde ex æquatione $yy + \mathfrak{C}xx = a$ oriatur

$$\frac{(\mu\mu + \mathfrak{C}(\mu n - \nu m)^2)ss}{mm} + \frac{\mathfrak{C}(\mu\mu + \mathfrak{C}(\mu n - \nu m)^2)rr}{\mu\mu + 2\mathfrak{C}\mu n(\mu n - \nu m) + \mathfrak{C}\mathfrak{C}(\mu n - \nu m)^2} =$$

$$a = 0.$$

114. Vocemus jam semidiametrum $CG = f$ & semiconjugatam $CE = CF = g$, critique $f = \sqrt{\frac{a}{\mathfrak{C}}}$ & $g = \sqrt{a}$, seu

$$a = gg \text{ \& } \mathfrak{C} = \frac{gg}{ff} : \text{ unde fit } yy + \frac{ggxx}{ff} = gg. \text{ Po-$$

namus porro angulum $GCG = p$, erit $\text{tang. } p =$

$$\frac{\mathfrak{C}m(\mu n - \nu m)}{\mu + n\mathfrak{C}(\mu n - \nu m)}. \text{ At, ob angulum } GCE = q, \text{ si ponatur}$$

angulus $ECE = \varpi$, erit $AQM = \Phi = q + \varpi$; ideoque $\mu = \text{fin.}(q + \pi)$; $\nu = \text{cof.}(q + \varpi)$, $m = \text{fin. } q$ &

$$n = \text{cof. } q. \text{ Ergo } \text{tang. } p = \frac{\mathfrak{C} \cdot \text{fin. } q \cdot \text{fin. } \varpi}{\text{fin.}(q + \pi) + \mathfrak{C} \cdot \text{cof. } q \cdot \text{fin. } \pi} =$$

$$\frac{\mathfrak{C} \cdot \text{tang. } q \cdot \text{tang. } \varpi}{\text{tang. } q + \text{tang. } \varpi + \mathfrak{C} \cdot \text{tang. } \varpi}, \text{ \&}$$

$$\text{fin. } p = \frac{\mathfrak{C} \cdot \text{fin. } q \cdot \text{fin. } \pi}{\sqrt{(\mu\mu + 2\mathfrak{C}\mu n(\mu n - \nu m) + \mathfrak{C}\mathfrak{C}(\mu n - \nu m)^2)}},$$

$\mu\mu +$

atque

LIB. II.

$\mu\mu + \beta(\mu n - \nu m)^2 = (\sin.(q + \pi))^2 + \beta(\sin.\pi)^2$,
quibus valoribus in subsidium vocatis prodit ista aequatio inter.

$$r \& s \frac{((\sin.q + \pi)^2 + \beta(\sin.\pi)^2)ss}{(\sin.q)^2} + \frac{\beta((\sin.q + \pi)^2 + \beta(\sin.\pi)^2)rr}{\beta\beta(\sin.q)^2(\sin.\pi)^2}$$

$$(\sin.p)^2 - \alpha = 0. \text{ At est } \beta = \frac{\text{tang } p \cdot \sin.(q + \pi)}{(\sin.q - \cos q \cdot \text{tang } p) \sin.\pi} =$$

$$\frac{\text{tang } p \cdot (\text{tang } q + \text{tang } \pi)}{\text{tang } \pi (\text{tang } q - \text{tang } p)} = \frac{gg}{ff} = \frac{\cot.\pi \cdot \text{tang } q + 1}{\cot.p \cdot \text{tang } q - 1}, \text{ seu}$$

$$\text{tang } q = \frac{ff + gg}{gg \cdot \cot.p - ff \cdot \cot.\pi}, \text{ unde plurima consectaria deduci}$$

$$\text{possunt. Erit vero } \frac{gg}{ff} = \frac{\sin.p \cdot \sin.(q + \pi)}{\sin.\pi \sin.(q - p)}$$

115. Sit semidiameter $Cg = a$, ejusque semidiameter conjugata $C = b$; erit ex aequatione ante inventa,

$$a = \frac{\sin.q \cdot \sin.\pi \sqrt{\alpha\beta}}{\sin.p \sqrt{((\sin.q + \pi)^2 + \beta(\sin.\pi)^2)}} =$$

$$\frac{gg \cdot \sin.q \cdot \sin.\pi}{\sin.p \sqrt{(ff(\sin.(q + \pi))^2 + gg(\sin.\pi)^2)}}, \& b =$$

$$\frac{fg \cdot \sin.q}{\sqrt{(ff(\sin.(q + \pi))^2 + gg(\sin.\pi)^2)}}, \text{ hinc erit } a : b =$$

$$g \cdot \sin.\pi : f \cdot \sin.p. \text{ Est vero porro } (\sin.(q + \pi))^2 +$$

$$\frac{gg}{ff}(\sin.\pi)^2 = \frac{\sin.(q + \pi)}{\sin.(q - p)} (\sin.(q - p) \cdot \sin.(q + \pi) + \sin.p \cdot \sin.\pi)$$

$$= \frac{\sin.q \cdot (\sin.(q + \pi) \cdot \sin.(q + \pi - p))}{\sin.(q - p)}, \text{ unde fiet } a =$$

$$\frac{gg \cdot \sin.\pi}{f \cdot \sin.p} \sqrt{\frac{\sin.q \cdot \sin.(q - p)}{\sin.(q + \pi) \sin.(q + \pi - p)}}; \text{ seu, ob } \frac{gg}{ff} =$$

$$\frac{\sin.p \cdot \sin.(q + \pi)}{\sin.\pi \cdot \sin.(q - p)}, \text{ erit } a = f \sqrt{\frac{\sin.q \cdot \sin.(q + \pi)}{\sin.(q - p) \cdot \sin.(q + \pi - p)}}$$

$$\& b = g \sqrt{\frac{\sin.q \cdot \sin.(q - p)}{\sin.(q + \pi) \cdot \sin.(q + \pi - p)}}, \text{ ergo erit}$$

$$a : b = f \cdot \sin.(q + \pi) : g \cdot \sin.(q - p) \& ab =$$

$$\frac{fg \cdot \sin.q}{\sin.(q + \pi - p)}.$$

116. Si ergo in Sectione conica binæ Diametri conjugatæ CAP. V.
habeantur, *GI*, *EF* & *gi*, *ef*, erit primo

$$Cg : Ce = CG. \text{ sin. } ECe : CG. \text{ sin. } GCg.$$

Ergo

$$\text{ sin. } GCg : \text{ sin. } ECe = CE. Ce : CG. Cg.$$

& si chordæ *Ee* & *Gg* ducantur, fiet hinc Triangulum *CGg* = Triangulo *CEe*. Deinde erit *Cg : Ce* = *CG. sin. GCe : CE. sin. gCE*, seu *Ce. CG. sin. GCe = CE. Cg. sin. gCE*: unde, si ducantur chordæ *Ge* & *gE*, erunt Triangula *GCE* & *gCE* inter se æqualia, seu e regione erit Triangulum *ICf* = Triangulo *iCF*. Ultima vero æquatio *ab. sin. (q + π - p) = fg. sin. q* dabit *Cg. Ce. sin. gCe = CG. CE. sin. GCE*. Quod si ergo ducantur chordæ *EG* & *eg*, vel e regione *FI* & *fi* erunt pariter Triangula *ICF* & *iCf* æqualia: unde sequitur omnia parallelogramma, quæ circa binas Diametros conjugatas describuntur, inter se esse æqualia.

117. Habentur ergo tria triangulorum paria inter se æqualia, nempe,

I. Triangulum *FCf* æquale Triangulo *ICi*.

II. Triangulum *fCI* æquale Triangulo *FCi*.

III. Triangulum *FCI* æquale Triangulo *fCi*.

Unde sequitur fore trapezia *FfCI* & *iCfI* inter se æqualia; a quibus si auferatur idem triangulum *fCI*, erit Triangulum *FIf* = Triangulo *Ifi*: quæ cum super eadem basi *fI* sint constituta, necesse est ut sit chorda *Fi* chordæ *fI* parallela. Porro itaque erit Triangulum *Fii* = Triangulo *ifF*, ad quæ si addantur triangula æqualia *FCi* & *fCi*, erunt quoque hæc trapezia inter se æqualia *FCii* = *iCfF*.

118. Hinc etiam deducitur methodus ad quodvis Lineæ T A B.
secundi ordinis punctum *M* tangentem *MT* ducendi. Sumta VII.
enim Diametro *GI* pro Axe, cui conjugatæ semissis sit *EC*, Fig. 27.
ex puncto *M* ipsi *CE* parallela ad Axem ducatur *MP*, quæ erit semiordinata, ac *PN = PM*. Ducta *CM*, quæ erit Semidiameter, quærat eam Semidiameter conjugata *CK*, cui tangens *MT* quæsitæ erit parallela. Sit angulus *GCE = q*;

Euleri *Introduct. in Anal. infin. Tom. II.* H GCM

LIB. II.

$GCM = p$ & $ECK = \varpi$; erit, uti vidimus, $\frac{EC^2}{GC^2} = \frac{\sin. p. \sin. (q + \pi)}{\sin. \pi. \sin. (q - p)}$ & $MC = CG \sqrt{\frac{\sin. q. \sin. (q + \pi)}{\sin. (q - p). \sin. (q + \pi - p)}}$. At in Triangulo CMP est $MC^2 = CP^2 + MP^2 + 2PM \times CP. \cos. q.$ & $MP: MC = \sin. p: \sin. q.$ & $MP: CP = \sin. p: \sin. (q - p)$. Deinde in Triangulo CMT , ob angulos datos, erit $CM: CT: MT = \sin. (q + \pi): \sin. (q + \pi - p): \sin. p$. Hinc, angulis eliminatis, erit $MC = CG \sqrt{\frac{MC \cdot CM}{CP \cdot CT}}$ seu $CG^2 = CP \cdot CT$. Hinc erit $CP: CG = CG: CT$, unde positio tangentis expedite invenitur. Erit autem ex hac proportione dividendo $CP: PG = CG: TG$; & ob $CG = CI$ componendo $CP: IP = CG: TI$.

119. Cum sit $\frac{CE^2}{CG^2} = \frac{\sin. p. \sin. (q + \varpi)}{\sin. \varpi. \sin. (q - p)}$ & $\frac{CK^2}{CM^2} = \frac{\sin. p. \sin. (q - p)}{\sin. \pi. \sin. (q + \pi)}$, itemque $\frac{CM^2}{CG^2} = \frac{\sin. q. \sin. (q + \pi)}{\sin. (q - p). \sin. (q + \pi - p)}$ & $\frac{CK^2}{CE^2} = \frac{\sin. q. \sin. (q - p)}{\sin. (q + \varpi). \sin. (q + \pi - p)}$, erit $\frac{CE^2 + CG^2}{CG^2} = \frac{\sin. p. \sin. (q + \varpi) + \sin. \varpi. \sin. (q - p)}{\sin. \pi. \sin. (q - p)}$, & $\frac{CK^2 + CM^2}{CM^2} = \frac{\sin. p. \sin. (q - p) + \sin. \pi. \sin. (q + \pi)}{\sin. \varpi. \sin. (q + \pi)}$. At est $\sin. A. \sin. B =$

$\frac{1}{2} \cos. (A - B) - \frac{1}{2} \cos. (A + B)$ & vicissim $\frac{1}{2} \cos. A - \frac{1}{2} \cos. B = \sin. \frac{A+B}{2}. \sin. \frac{B-A}{2}$. Unde erit $\sin. p. \sin. (q + \pi) + \sin. \varpi. \sin. (q - p) = \frac{1}{2} \cos. (q + \varpi - p) - \frac{1}{2} \cos. (q + \pi + p) + \frac{1}{2} \cos. (q - \pi - p) - \frac{1}{2} \cos. (q + \pi - p) = \frac{1}{2} \cos. (q - \varpi - p) - \frac{1}{2} \cos. (q + \pi + p) = \sin. q. \sin. (p + \pi)$. Atque $\sin. p. \sin. (q - p) + \sin. \pi. \sin. (q + \varpi) = \frac{1}{2} \cos. (q - 2p) - \frac{1}{2} \cos. q + \frac{1}{2} \cos. q -$

$$\frac{1}{2} \cos.(q + 2\varpi) = \frac{1}{2} \cos.(q - 2p) - \frac{1}{2} \cos.(q + 2\varpi) = \frac{\text{CAP. V.}}{\sin.(q + \varpi - p) \cdot \sin.(p + \varpi)}.$$

Hinc ergo erit

$$\frac{CE^2 + CG^2}{CG^2} = \frac{\sin. q \cdot \sin. (p + \pi)}{\sin. \pi \cdot \sin. (q - p)},$$

&

$$\frac{CK^2 + CM^2}{CM^2} = \frac{\sin.(q + \varpi - p) \cdot \sin.(p + \pi)}{\sin. \varpi \cdot \sin.(q + \pi)},$$

unde conficitur

$$\frac{CE^2 + CG^2}{CK^2 + CM^2} = \frac{CG^2}{CM^2} \cdot \frac{\sin. q \cdot \sin. (q + \pi)}{\sin.(q - p) \cdot \sin.(q + \pi - p)} = \frac{CG^2}{CM^2} \cdot \frac{CM^2}{CG^2}.$$

Quare erit $CE^2 + CG^2 = CK^2 + CM^2$, ideoque in eadem Linea secundi ordinis summa quadratorum binarum Diametrorum conjugatarum semper est constans.

120. Cum igitur dentur duæ Semidiametri conjugatæ CG & CE , pro Semidiametro CM ad libitum assumpta statim reperitur ejus semidiameter conjugata CK sumendo $CK = \sqrt{(CE^2 + CG^2 - CM^2)}$. Ex superioribus ergo Sectionum conicarum proprietatibus erit $TG \cdot TI : TM^2 = CG \cdot CI : CK^2 = CG^2 : CK^2 = CG^2 : CE^2 + CG^2 - CM^2$; ideoque $TM^2 = CG \sqrt{\frac{CE^2 + CG^2 - CM^2}{TG \cdot TI}}$. Simili modo, si

producta Ordinata MN , ducatur tangens NT , ambæ tangentes MT & NT Axi TI in eodem puncto T occurrent. Erit enim pro utraque $CP : CG = CG : CT$. At vero ducta recta CN erit $TN = CG \sqrt{\frac{CK^2 + CG^2 - CM^2}{TG \cdot TI}}$, adeoque $TM^2 : TN^2 = CE^2 + CG^2 - CM^2 : CE^2 + CG^2 - CN^2$. Erit vero, ob bisectionem MN in P , $\sin. CTM : \sin. CTN = TN : TM = \sqrt{(CE^2 + CG^2 - CN^2)} : \sqrt{(CE^2 + CG^2 - CM^2)}$.

121. Ducantur in terminis Diametri A & B tangentes AK , BL , ac producat tangens quæcunque MT' donec utramque tangentem secet in punctis K & L . Sit ECF Diameter conjugata, cui tum Applicatæ MP tum tangentes AK & BL ,
TAB. VII. Fig. 28.

LIB. II. erunt parallelae. Cum jam sit, ex natura tangentis, CP :
 $CA = CA$: CT ob $CB = CA$ erit CP : $AP = CA$:
 AT , & CP : $BP = CA$: BT ergo CP : $CA = CA$:
 $CT = AP$: $AT = BP$: BT , hincque AT : $BT = AP$:
 BP . At est AT : $BT = AK$: BL , ergo AK : $BL =$
 AP : BP . Deinde est $AT = \frac{CA \cdot AP}{CP}$; $BT = \frac{CA \cdot BP}{CP}$;
 & $PT = \frac{CA \cdot AP}{CP} + AP = \frac{AP \cdot BP}{CP}$ ergo AT : $PT =$
 CA : $BP = AK$: PM ; similique modo erit BT : $PT =$
 CA : $AP = BL$: PM ; unde fit $AK = \frac{CA \cdot PM}{BP}$, $BL =$
 $\frac{CA \cdot PM}{AP}$ & $AK \cdot BL = \frac{CA^2 \cdot PM^2}{AP \cdot BP}$. At est $AP \cdot BP$:
 $PM^2 = AC^2$: CE^2 , unde consequitur ista egregia proprie-
 tas $AK \cdot BL = CE^2$, ex qua porro fit $AK = CE \sqrt{\frac{AP}{BP}}$ &
 $BL = CE \sqrt{\frac{BP}{AP}}$, & AP : $BP = AK^2$: $CE^2 = CE^2$:
 $BL^2 = KM$: ML , atque AK : $BL = KM$: LM .

122. In quocunque ergo Curvæ puncto M ducatur tangens
 occurrens tangentibus parallelis AK , BL in K & L , erit sem-
 per Semidiameter CE tangentibus AK & BL parallela me-
 dia proportionalis inter AK & BL , seu erit $CE^2 = AK \times$
 BL . Quod si ergo in alio quocunque Curvæ puncto m simili
 modo ducatur tangens km , erit quoque $CE^2 = Ak \cdot Bl$,
 ideoque AK : $Ak = Bl$: BL ; hincque erit quoque AK :
 $Kk = Bl$: Ll . Secent tangentes KL & kl se mutuo in o ,
 eritque AK : $Bl = Ak$: $Bk = Kk$: $Ll = ko$: $lo = Ko$:
 Lo . Atque hæ sunt præcipuæ Sectionum conicarum proprie-
 tates, ex quibus NEWTONUS plurima insignia problemata
 resolvit in *Principiis*.

123. Cum sit AK : $Bl = Ko$: Lo , si tangens LB pro-
 ducatur in I ut sit $BI = AK$, erit I punctum, ubi tangens
 ex altera parte ipsi KL parallela hanc tangentem LB esset se-
 ctura, quemadmodum K in tangente LK est punctum, ubi ea

a tangente AK ipsi BL parallela secatur. Transibit ergo recta IK per Centrum C , ibique bifariam secabitur. Quodsi igitur CAP. V.
 duæ quæcunque tangentes BL , ML , modo præscripto in I & K producantur, eæque a tertia tangente lmo in punctis l & o secentur, erit $BI : Bl = Ko : Lo$, &, componendo, $IB : Il = Ko : KL$, ubicunque ergo tertia tangens lmo ducatur erit perpetuo $IB . KL = Il . Ko$. Ducta ergo quarta tangente quacunque $\lambda\mu\omega$ binas primum assumtas IL & KL secante in λ & ω , erit pariter $IB . KL = I\lambda . K\omega$, ideoque $Il . Ko = I\lambda . K\omega$ seu $Il : I\lambda = K\omega : Ko$. Ductis ergo rectis $l\omega$, λo , in qua ratione hæc secabuntur, recta per sectionum puncta transiens in eadem ratione secabit rectam IK . Quare si rectæ $l\omega$ & λo bifecentur, recta per bifectionis puncta transiens, bifecabit quoque rectam IK ideoque per Centrum Sectionis conicæ C transibit.

124. Quod recta nmH , quæ rectas $l\omega$, λo in data ratione fecat, in eadem ratione secare debeat rectam KI , si quidem fuerit $Il : I\lambda = K\omega : Ko$, seu $I\lambda : \lambda l = Ko : o\omega$, hoc modo ex Geometria ostendetur. Secet recta mn utramque $l\omega$ & λo in ratione $m : n$, seu fit $\lambda m : mo = ln : n\omega = m : n$, & ea producta trajiciat tangentes IL , & KL in Q & R ; eritque $\sin. Q : \sin. R = \frac{ln}{Ql} : \frac{n\omega}{R\omega} = \frac{\lambda m}{Q\lambda} : \frac{mo}{R\omega} = \frac{m}{Ql} : \frac{n}{R\omega}$, ergo $Ql : R\omega = Q\lambda : R\omega$, & dividendo $l\lambda : o\omega = Q\lambda : R\omega = Ql : R\omega$. Cum vero fit $l\lambda : o\omega = I\lambda : Ko$, erit quoque $QI : RK = l\lambda : o\omega$, & $\sin. Q : \sin. R = \frac{m}{l\lambda} : \frac{n}{o\omega}$. At est quoque $\sin. Q : \sin. R = \frac{HI}{QI} : \frac{HK}{KR} = \frac{HI}{l\lambda} : \frac{HK}{o\omega}$, unde fit $HI : HK = m : n = \lambda m : mo = ln : n\omega$.

TAB. VIII.
Fig. 30.

125. Datis duabus Semidiametris conjugatis $CG . CE$, quæ TAB. VII.
 angulum obliquum $GCE = q$ inter se comprehendant, semper reperiri poterunt duæ alix Semidiametri conjugatæ CM & CK quæ angulum MCK rectum constituent. Sit angulus $GCM = p$; & posito $ECK = \pi$, erit $q + \pi - p = 90^\circ$
H 3 ideoque

Fig. 27.

L I B. II. ideoque $\sin. \varpi = \cos. (q - p)$ & $\sin. (q + \varpi) = \cos. p$. Unde

$$(ex \S. 119.) \text{ erit } \frac{CE^2}{CG^2} = \frac{\sin. p. \cos. p}{\sin. (q-p). \cos. (q-p)} = \frac{\sin. 2p}{\sin. 2(q-p)} = \frac{\sin. 2p}{\sin. 2q. \cos. 2p - \cos. 2q. \sin. 2p}; \text{ ergo } \frac{CG^2}{CE^2} = \sin. 2q. \cot. 2p - \cos. 2q.$$

ex quo fit $\cot. 2GCM = \cot. 2q + \frac{CG^2}{CE^2. \sin. 2q}$, quæ æquatio

semper præbet solutionem possibilem. Erit vero $\frac{CM^2}{CG^2} =$

$$\frac{\sin. q. \cos. p}{\sin. (q-p)} \text{ \& } \frac{CG^2}{CM^2} = 1 - \frac{\tan. p}{\tan. q}, \text{ unde } \tan. p = \tan. q -$$

$$\frac{CG^2}{CM^2} \tan. q. \text{ At cum sit } CM^2 + CK^2 = CG^2 + CE^2 \text{ \& }$$

$CK. CM = CG. CE. \sin. q$; erit $CM + CK = \sqrt{(CG^2 + 2CG. CE. \sin. q + CE^2)}$ & $CM - CK = \sqrt{(CG^2 - 2CG. CE. \sin. q + CE^2)}$ unde ipsæ Diametri conjugatæ orthogonales reperiuntur.

T A B. VII. Fig. 29. 126. Sint igitur CA & CE ambæ Semidiametri conjugatæ Sectionis conicæ orthogonales, quæ vocari solent DIAMETRI PRINCIPALES, sese in Centro C normaliter decussantes. Sit Abscissa $CP = x$, Applicata $PM = y$, eritque, uti vidimus, $yy = a - \mathcal{E}xx$, vocatis autem Semidiametris principalibus $AC = a$, $CE = b$ erit $a = bb$ & $\mathcal{E} = \frac{bb}{aa}$, unde fit $yy = bb - \frac{bbxx}{aa}$. Ex qua æquatione intelligitur, cum non mutetur, sive x & y sumantur affirmativæ sive negativæ, Curvam esse habituram quatuor partes similes & æquales utrinque circa Diametros AC & EF sitas. Erit nempe quadrans ACE similis & æqualis quadranti ACF , hisque bini pares ad alteram partem Diametri EF sunt positi.

127. Si ex Centro C , quod pro initio Abscissarum assumimus, ducamus rectam CM , erit ea $= \sqrt{(xx + yy)} = \sqrt{(bb - \frac{bbxx}{aa} + xx)}$, unde intelligitur, si fuerit $b = a$, seu $CE = CA$, fore $CM = \sqrt{bb} = b = a$. Hoc ergo casu omnes rectæ ex Centro C ad Curvam productæ inter se
erunt

erunt æquales; quæ, cum sit proprietas Circuli, manifestum est CAP. V.
 Sectionem conicam, cujus binæ Diametri conjugatæ principa-
 les sint inter se æquales, esse Circulum, cujus adeo æquatio
 inter Coordinatas orthogonales, positis $CP = x$ & $PM = y$,
 erit $yy = aa - xx$, existente Radio Circuli $CA = a$.

128. Sin autem non fuerit $b = a$, recta CM per x ratio-
 naliter nunquam exprimi poterit. Dabitur autem aliud pun-
 ctum D in Axe, a quo omnes rectæ ad Curvam ductæ DM
 rationaliter exprimi possunt; ad quod inveniendum, ponat-
 ur $CD = f$, atque ob $DP = f - x$ erit $DM^2 = ff -$
 $2fx + xx + bb - \frac{bbxx}{aa} = bb + ff - 2fx + \frac{(aa - bb)xx}{aa}$, quæ ex-
 pressio quadratum evadet si fuerit $ff = \frac{(aa - bb)(bb + ff)}{aa}$ seu
 $0 = aa - bb - ff$, unde fit $f = \pm \sqrt{(aa - bb)}$, hujusmo-
 di ergo punctum dabitur geminum in Axe AC , utrinque sci-
 licet a Centro in distantia $CD = \sqrt{(aa - bb)}$. Erit autem
 tum $DM^2 = aa - 2x\sqrt{(aa - bb)} + \frac{(aa - bb)xx}{aa}$, hincque
 $DM = a - \frac{x\sqrt{(aa - bb)}}{a} = AC - \frac{CD \cdot CP}{AC}$. Facto $CP = 0$,
 fiet $DM = DE = a = AC$, sumta autem Abscissa $CP = CD$,
 seu $x = \sqrt{(aa - bb)}$, recta DM abibit in Applicatam DG ,
 eritque ergo $DG = \frac{bb}{a} = \frac{CE^2}{AC}$, seu fiet DG tertia propor-
 tionalis ad AC & CE .

129. Ob singularem hanc proprietatem, qua puncta D hoc
 modo definita gaudent, ista Diametri principalis puncta om-
 nino attentione sunt digna; plurimis aliis autem hæc eadem
 puncta prædita sunt eximiis proprietatibus, ob quas peculiariter
 nacta sunt nomina. Vocantur vero ista puncta FOCI seu UM-
 BILICI Sectionis conicæ; & cum in Diametro majori a sint
 posita, ista Diameter a sua conjugata b ita distinguitur, ut ea
 vocetur Axis principalis & *transversus*, dum altera b ejus Axis
conjugatus appellatur. Applicata vero orthogonalis DG in ipso
Foco

LIB. II. Foco alterutro erecta nomen SEMIPARAMETRI obtinuit, tota enim PARAMETER est Ordinata in D , seu DG bis sumta, quæ etiam *latus rectum* nuncupatur. Est ergo Semiaxis conjugata CE media proportionalis inter Semiparametrum DG & Semiaxem transversum AC . Termini porro Axis transversi, ubi is a Curva interfecatur, vocantur VERTICES, ut A ; atque hanc habent proprietatem ut iis in locis tangens curvæ sit ad Axem principalem AC normalis.

130. Ponatur semiparameter $DG = c$; & distantia Foci a Vertice $AD = d$, erit $CD = a - d = \sqrt{(aa - bb)}$ & $DG = \frac{bb}{a} = c$, unde fit $bb = ac$, & $a - d = \sqrt{(aa - ac)}$:

ergo $ac = 2ad - dd$, & $a = \frac{dd}{2d - c}$, & $b = d\sqrt{\frac{c}{2d - c}}$. Ex

datis ergo distantia Foci a Vertice $AD = d$ & semilatare recto $DG = c$, Sectio conica determinatur. Posito nunc

$CP = x$ erit $DM = a - \frac{(a - d)x}{a} = \frac{dd}{2d - c} - \frac{(c - d)x}{d}$.

Sit $DP = t$, erit $x = CD - t = \frac{(c - d)d}{2d - c} - t$; unde

fit $DM = c + \frac{(c - d)t}{d}$. Vocetur angulus $ADM = v$,

erit $\frac{t}{DM} = -\text{cos. } v$, ideoque $d \cdot DM = cd + (d - c)$

$DM \cdot \text{cos. } v$ & $DM = \frac{cd}{d - (d - c) \cdot \text{cos. } v}$, & $\text{cos. } v =$

$\frac{d(DM - DG)}{(d - c)DM}$.

C A P U T V I.

De Linearum secundi ordinis subdivisione in genera.

131. **P**roprietates, quas in Capite precedente eluimus, in omnes Lineas, quæ ad ordinem secundum pertinent, æque competunt; neque enim ullius varietatis, qua ista Linea aliâ ab aliis distinguuntur, fecimus mentionem. Quamquam autem omnes Lineæ secundi ordinis his expositis proprietatibus communiter gaudent, tamen eæ inter se ratione figuræ plurimum differunt; quamobrem Lineas in hoc ordine contentas distribui convenit in genera, quo facilius diversæ figuræ, quæ in hoc ordine occurrunt, distingui, atque proprietates, quæ tantum in singula genera competunt, evolvi queant.

132. Æquationem autem generalem pro Lineis secundi ordinis, mutando tantum Axem & Abscissarum initium, co reduximus, ut omnes Lineæ secundi ordinis contineantur in hac æquatione $yy = a + \epsilon x + \gamma xx$, in qua x & y denotant Coordinatas orthogonales. Cum igitur pro qualibet Abscissa x Applicata y duplicem induat valorem, alterum affirmativum alterum negativum, iste Axis, in quo Abscissæ x capiuntur, Curvam secabit in duas partes similes & æquales; eritque adeo iste Axis Diameter Curvæ orthogonalis, atque omnis Linea secundi ordinis habebit Diametrum orthogonalem, super qua, tanquam Axe, Abscissas hic assumo.

133. Tres igitur ingrediuntur in hanc æquationem quantitates constantes a , ϵ , & γ : quæ, cum infinitis modis inter se variari possint, innumerabiles varietates in Lineis curvis orientur, quæ autem vel magis vel minus a se invicem ratione figuræ discrepabunt. Primum enim eadem figura infinities ex proposita æquatione $yy = a + \epsilon x + \gamma xx$ resultat; variato nempe Abscissarum initio in Axe, quod fit dum Abscissâ x

LIB II. data quantitate vel augetur vel minuitur. Deinde eadem quoque figura, sub diversa magnitudine in æquatione continetur, ita ut infinitæ Lineæ curvæ prodeant, quæ tantum ratione quantitatis a se invicem differant, uti Circuli diversis Radiis descripti. Ex quibus manifestum est, non omnem litterarum a , b , & γ variationem diversas Linearum secundi ordinis species vel genera producere.

134. Maximum autem discrimen in Lineis curvis quæ in æquatione $yy = a + bx + \gamma xx$ continentur, suggerit natura coefficientis γ , prout is vel affirmativum habuerit valorem vel negativum. Si enim γ habeat valorem affirmativum, posita Abscissa x infinita, quo casu terminus γxx infinities major evadet quam reliqui $a + bx$, ac propterea expressio $a + bx + \gamma xx$ affirmativum obtinet valorem, Applicata y pariter duplicem habebit valorem infinite magnum, alterum affirmativum alterum negativum, quod idem evenit si ponatur $x = -\infty$, quo casu nihilominus expressio $a + bx + \gamma xx$ induet valorem infinite magnum affirmativum. Hanc ob rem, existente γ quantitate affirmativa, Curva quatuor habebit ramos in infinitum excurrentes, binos Abscissæ $x = +\infty$ & binos Abscissæ $x = -\infty$ respondentes. Hæ igitur curvæ quatuor tamis in infinitum excurrentibus præditæ unum Linearum secundi ordinis genus constituere censentur, atque nomine HYPERBOLARUM appellantur.

135. Sin autem coefficientis γ negativum habuerit valorem, tum, posito sive $x = +\infty$ sive $x = -\infty$ expressio $a + bx + \gamma xx$ negativum valorem tenebit, ideoque Applicata y imaginaria fiet. Neque igitur usquam in his Curvis Abscissâ neque Applicata poterit esse infinita, ideoque nulla dabitur Curvæ portio in infinitum excurrentis, sed tota Curva in spatio finito ac determinato continebitur. Hæc igitur Linearum secundi ordinis species nomen ELLIPSIUM obtinuit, quarum propterea natura continetur in hac æquatione $yy = a + bx + \gamma xx$, si γ fuerit quantitas negativa.

136. Cum igitur valor ipsius γ , prout is fuerit vel affirmativus

tivus vel negativus, tam diversam Linearum secundi ordinis indolem producat, ut hinc merito duo diversa genera constituentur: si ponatur $\gamma = 0$, qui valor inter affirmativos & negativos medium tenet locum, Curva quoque hinc resultans mediam quandam speciem inter Hyperbolas atque Ellipses constituet, quæ PARABOLA vocatur, cujus ergo natura hæc exprimitur æquatione $yy = a + \epsilon x$. Hic perinde est sive ϵ fuerit quantitas affirmativa sive negativa, quoniam indoles Curvæ non mutatur sumta Abscissa x negativa. Sit igitur ϵ quantitas affirmativa, atque manifestum est, crescente Abscissa x in infinitum, Applicatam y quoque infinitam fore tam affirmativam quam negativam, ex quo Parabola duos habeat ramos in infinitum excurrentes, plures autem duobus habere non poterit, quia posito $x = -\infty$, Applicata y valor fit imaginarius.

137. Habemus ergo tres Linearum secundi ordinis species, Ellipsin, Parabolam, & Hyperbolam, quæ a se invicem tantopere discrepant, ut eas inter se confundere omnino non liceat. Discrimen enim essenziale in numero ramorum in infinitum excurrentium consistit; Ellipsis enim nullam portionem habet in infinitum abeuntem, sed tota in spatio finito includitur. Parabola vero duos habet ramos in infinitum excurrentes: & Hyperbola quatuor. Quare, cum in Capite præcedente proprietates Sectionum conicarum in genere simus contemplati, nunc quibus proprietatibus quæque species sit prædita, videamus.

138. Incipiamus ab Ellipsi, cujus æquatio est hæc $yy = a + \epsilon x - \gamma xx$, sumtis Abscissis in Diametro orthogonalis. Quoniam vero initium Abscissarum ab arbitrio nostro pendet, TAB. VIII. Fig. 31.

si id removeamus intervallo $\frac{\epsilon}{2\gamma}$, orietur æquatio hujus formæ $yy = a - \gamma xx$, in qua Abscissæ a Centro figuræ capiuntur. Sit igitur C Centrum & AB Diameter orthogonalis, atque erit Abscissa $CP = x$, & Applicata $PM = y$. Fiet ergo

I 2 $y = 0$,

LIB. II. $y = 0$, sumta $x = \pm \sqrt{\frac{a}{\gamma}}$ & si x limites hos $+\sqrt{\frac{a}{\gamma}}$, $-\sqrt{\frac{a}{\gamma}}$ transgrediatur Applicata y fiet imaginaria; quod indicio est totam Curvam intra istos limites contineri. Erit ergo $CA = CB = \sqrt{\frac{a}{\gamma}}$: tum facto $x = 0$, fiet $CD = CE = \sqrt{a}$. Ponatur ergo Semidiameter seu Semiaxis principalis $CA = CB = a$, & Semiaxis conjugatus $CD = CE = b$, erit $a = bb$ & $\gamma = \frac{bb}{aa}$. Unde pro Ellipsi ista orietur æquatio $yy = bb - \frac{bbxx}{aa} = \frac{bb}{aa}(aa - xx)$.

139. Quando isti Semiaxes conjugati a & b fiunt inter se æquales, tum Ellipsis abibit in Circulum ob $yy = aa - xx$, seu $yy + xx = aa$; erit enim $CM = \sqrt{(xx + yy)} = a$, ideoque omnia Curvæ puncta M æqualiter a Centro C erunt remota, quæ est proprietas Circuli. Sin autem Semiaxes a & b inter se fuerint inæquales, tum Curva erit oblonga, nempe erit vel AB major quam DE vel DE major quam AB . Quia vero Axes conjugati AB & DE inter se commutari possunt, atque perinde est in utro Abscissas capiamus, ponamus AB esse Axem majorem, seu a majorem quam b ; atque in hoc Axe existent Foci Ellipsis F & G sumendo $CF = CG = \sqrt{(aa - bb)}$, Semiparameter vero, seu Semilatus rectum Ellipsis erit $= \frac{bb}{a}$, quæ exprimit magnitudinem Applicatæ in alterutro Foco F vel G erectæ.

140. Ad Curvæ punctum M ducantur ex utroque Foco rectæ FM & GM , eritque, uti supra vidimus, $FM = AC - \frac{CF \cdot CP}{AC} = a - \frac{x\sqrt{(aa - bb)}}{a}$, & $GM = a + \frac{x\sqrt{(aa - bb)}}{a}$: unde fit $FM + GM = 2a$. Quare, si ad quodvis Curvæ punctum M ex ambobus Focis ducantur rectæ FM & GM , earum summa semper æquabitur Axi majori $AB =$

$AB = 2a$; ex quo cum insignis Focorum proprietas perspicitur, tum modus facilis Ellipsin mechanice describendi colligitur. CAP. VI.

141. In puncto M ducatur tangens TMt , quæ Axibus occurrat in punctis T & t ; eritque, ut supra demonstravimus, $CP : CA = CA : CT$; unde $CT = \frac{a^2}{x}$: similique modo, permutatis Coordinatis, $Ct = \frac{b^2}{y}$. Erit ergo $TP = \frac{a^2}{x} - x$, $TF = \frac{a^2}{x} - \sqrt{(aa - bb)}$, & $TA = \frac{a^2}{x} - a$. Fiet itaque $TP = \frac{a^2 - xx}{x} = \frac{aayy}{bbx}$, & $TM = \frac{y\sqrt{(b^2xx + a^2yy)}}{bbx}$, hincque $\text{tang. } CTM = \frac{bbx}{aay}$; $\text{sin. } CTM = \frac{bbx}{\sqrt{(b^2xx + a^2yy)}}$ & $\text{cos. } CTM = \frac{aay}{\sqrt{(b^2xx + a^2yy)}}$. Quare, si ad Axem in A normalis erigatur AV , quæ Curvam simul tanget, erit $AV = \frac{a(a-x)}{x} \cdot \frac{bbx}{aay} = \frac{bb(a-x)}{ay} = b\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$ ob $ay = b\sqrt{(aa - xx)}$.

142. Cum sit $FT = \frac{aa - x\sqrt{(aa - bb)}}{x}$ & $FM = \frac{aa - x\sqrt{(aa - bb)}}{a}$ erit $FT : FM = a : x$. Simili vero modo ob $GT = \frac{aa + x\sqrt{(aa - bb)}}{x}$ & $GM = \frac{aa + x\sqrt{(aa - bb)}}{a}$ erit $GT : GM = a : x$; unde erit $FT : FM = GT : GM$. At est $FT : FM = \text{sin. } FMT : \text{sin. } CTM$ & $GT : GM = \text{sin. } GMt : \text{sin. } CTM$, quam ob rem erit $\text{sin. } FMT = \text{sin. } GMt$, ideoque angulus $FMT =$ angulo GMt . Ambæ ergo rectæ ex Focis ad punctum Curvæ quodvis M ductæ æqualiter inclinantur ad tangentem Curvæ in illo puncto M , quæ est maxime principalis Factorum proprietas.

143. Cum sit $GT : GM = a : x$, ob $CT = \frac{a^2}{x}$ erit quo-

LIB. II. que $CT:CA = a:x$; unde $GT:GM = CT:CA$, quare si ex Centro C rectæ GM parallela ducatur CS , tangenti in S occurrens, erit $CS = CA = a$: eodem autem modo si ex C rectæ FM parallela ducatur ad tangentem erit ea pariter $= CA = a$. Cum autem sit $TM = \frac{y}{b} \sqrt{(b^2xx + a^2yy)}$, crit, ob $aayy = aabb - bbxx$, $TM = \frac{y}{b} \sqrt{(a^2 - xx)(aa - bb)}$: at est $FT.GT = \frac{a^2 - xx(aa - bb)}{xx}$; unde $TM = \frac{y}{b} \sqrt{FT.GT}$. Quare, ob $TG:TC = TM:TS$, crit $TS = \frac{TM.CT}{TG}$, ideoque $TS = \frac{y.CT}{b} \sqrt{\frac{FT}{GT}} = \frac{y.CT.FT}{b\sqrt{FT.GT}} = \frac{yy.CT.FT}{bb.TM}$. Deinde est $PT = \frac{aayy}{bbxx} = \frac{CT.yy}{bb}$, ergo $TS = \frac{PT.FT}{TM}$, ideoque $TM:PT = FT:TS$; unde intelligitur triangula TMP & TFS esse similia, ideoque rectam FS ad tangentem ex Foco F esse normalem. Erit vero $SV = \frac{AF.MV}{GM}$, quod ex his expressionibus eruere licet.

144. Quod si ergo ex alterutro Foco F in tangentem ducatur perpendicularum FS , & ad punctum S ex Centro C recta CS jungatur, erit hæc CS perpetuo semiaxi majori $AC = ax$ qualis. Erit vero ob $TM:y = TF:FS$, $FS = \frac{y.TF}{TM} = \frac{b.TF}{\sqrt{FT.GT}} = b\sqrt{\frac{FT}{GT}}$, ergo $GT:FT = GM:FM = CD^2:FS^2$; perpendicularum vero ex altero Foco in tangentem demissum erit $= b\sqrt{\frac{GT}{FT}}$, quare inter hæc perpendiculara erit Semiaxis minor $CD = b$ media proportionalis. Demittatur nunc quoque ex Centro C in tangentem perpendicularum CQ erit $TF:FS = GT:CQ$ ergo $CQ = \frac{b.CT}{\sqrt{FT.GT}} = bx.CT$

$\frac{bx.CT}{a\sqrt{FM.GM}} = \frac{ab}{\sqrt{FM.GM}}$, unde $CQ - FS = \frac{b.CF}{\sqrt{FT.GT}} =$
 CX , ducta FX tangenti parallela. Hinc erit $CQ - CX =$
 $\frac{b.TF}{\sqrt{FT.GT}}$ & $CQ + CX = \frac{b.TG}{\sqrt{FT.GT}}$, unde $CQ^2 - CX^2 =$
 bb & $CX = \sqrt{CQ^2 - bb}$: ex dato ergo Axe minori, in
 perpendicularo CQ reperitur punctum X unde normalis educta per
 Focum F transibit.

145. His Focorum proprietatibus expositis, consideremus
 duas quasvis Diametros conjugatas. Erit autem CM Semi-
 diameter, cujus conjugata reperietur si tangenti TM ex Centro
 parallela ducatur CK . Ponatur $CM = p$, $CK = q$, & an-
 gulus $MCK = CMT = s$, erit primo $pp + qq = aa + bb$
 & secundo $pq \sin. s = ab$, uti supra vidimus. At vero erit
 $pp = xx + yy = bb + \frac{(aa - bb)xx}{aa}$ & $qq = aa + bb -$
 $pp = aa - \frac{(aa - bb)xx}{aa} = FM.GM$, eodemque modo
 $pp = FK.GK$. Deinde, cum sit $CQ = \frac{ab}{\sqrt{FM.GM}}$, erit
 $\sin. CMQ = \sin. s = \frac{ab}{p\sqrt{FM.GM}}$. Denique erit $TM:$
 $TP = \frac{y}{b} \sqrt{FT.GT}$, $\frac{aayy}{bbx} = \sqrt{FM.GM} = \frac{ay}{b} =$
 $CK:CR$, unde $CR = \frac{ay}{b}$, & $KR = \frac{bx}{a}$, ideoque $CR.$
 $KR = CP.PM$. Denique erit $\sin. FMS = \frac{b}{\sqrt{GM.FM}} =$
 $\frac{b}{q}$: quia porro est $x = CP \frac{a\sqrt{(pp - bb)}}{\sqrt{(aa - bb)}}$ & $y = \frac{b\sqrt{(aa - pp)}}{\sqrt{(aa - bb)}}$
 PM , atque $CR = \frac{a\sqrt{(aa - pp)}}{\sqrt{(aa - bb)}}$ & $KR = \frac{b\sqrt{(pp - bb)}}{\sqrt{(aa - bb)}}$, erit
 $\text{tang. } ACM = \frac{y}{x}$, & $\text{tang. } 2 ACM = \frac{2yx}{xx - yy} =$
 $\frac{2ab\sqrt{(aa - pp)(pp - bb)}}{(aa + bb)pp - 2aabb}$. At est $ab = pq \sin. s$, $aa + bb = pp + qq$,
 &

LIB. II. & $\sqrt{(aa - pp)(pp - bb)} = -pq \cdot \text{cos. } s$, unde fit $\text{tang. } 2ACM = \frac{-2pq \cdot \text{cos. } s}{pp + qq \cdot \text{cos. } 2s}$, quia $\text{cos. } s$ est negativus. Tandem est $CK^2 = MI \cdot Mt$; ex superioribus vero eruitur $MV = q\sqrt{\frac{AP}{BP}}$ & $AV = b\sqrt{\frac{AP}{BP}}$; unde erit $AV : MV = b : q = CE : CK$. Ergo rectæ, si ducantur, AM & EK , inter se erunt parallelæ.

146. Quia est $pq \cdot \text{sin. } s = ab$, erit pq major quam ab ; & cum sit $pp + qq = aa + bb$, quantitates p & q magis ad rationem æqualitatis accedunt, quam a & b , unde inter omnes Diametros conjugatas, illæ quæ sunt orthogonales maxime a se invicem discrepant. Dabuntur ergo duæ Diametri conjugatæ inter se æquales, ad quas inveniendas fit $q = p$, critique $2pp = aa + bb$, & $p = q = \sqrt{\frac{aa + bb}{2}}$, & $\text{sin. } s = \frac{2ab}{aa + bb}$, atque $\text{cos. } s = \frac{aa - bb}{aa + bb}$; unde fit $\text{sin. } \frac{1}{2}s = \sqrt{\frac{aa - bb}{aa + bb}}$, $\text{cos. } \frac{1}{2}s = \sqrt{\frac{bb}{aa - bb}}$, ergo $\text{tang. } \frac{1}{2}s = \frac{a}{b} = \text{tang. } CEB$, & $MCK = 2CEB = AEB$. Porro $CP = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $CM = \frac{b}{\sqrt{2}}$, quare Semidiametri conjugatæ inter se æquales CM , CK erunt parallelæ Cordis AE & BE .

147. Si Abscissæ a Vertice A computentur, ponaturque $AP = x$, $PM = y$, cum nunc sit $a - x$ quod ante erat x , habebitur ista æquatio $yy = \frac{bb}{aa}(2ax - xx) = \frac{2bb}{a}x - \frac{bb}{aa}xx$, ubi patet esse $\frac{2bb}{a}$ Parametrum seu latus rectum Ellipsis. Ponatur Semilatus rectum, seu Applicata in Foco $= c$, & distantia Foci a Vertice $AF = d$, erit $\frac{bb}{a} = c$ & $a - \sqrt{(aa - bb)} = d = a - \sqrt{(aa - ac)}$, unde fit $2ad - dd = ac$ & $a = \frac{dd}{2d - c}$. Hinc erit $yy = 2cx - \frac{c(2d - c)xx}{d \cdot d}$, quæ est æquatio

æquatio pro Ellipsi inter Coordinatas orthogonales x & y , CAP. VI.
 Abscissis x in Axe principali AB a Vertice A computatis, ———
 quæ obtinetur ex datis distantia Foci a Vertice $AF = d$ &
 Semilatare recto $= c$; ubi notandum est semper esse debere
 $2d$ majorem quam c , quia est $AC = a = \frac{dd}{2d - c}$, & $CD =$
 $b = d\sqrt{\frac{c}{2d - c}}$.

148. Quod si ego fuerit $2d = c$ erit $yy = 2cx$, quam æ- TAB.
 quationem supra vidimus esse pro Parabola: æquatio enim supe- VIII.
 rior $yy = a + cx$ ad hanc formam reducitur, initio Abscissa- Fig. 32.
 rum intervallo $= \frac{a}{c}$ mutato. Sit igitur MAN Parabola,
 cujus natura inter Abscissam $AP = x$, & Applicatam $PM = y$
 hac æquatione exprimitur $yy = 2cx$. Erit ergo distantia Foci
 a Vertice $AF = d = \frac{1}{2}c$, & Semiparameter $FH = c$,
 atque ubique $PM^2 = 2FH \cdot AP$: unde, posita Abscissa AP
 infinita, simul Applicatæ PM & PN in infinitum excrescunt;
 ideoque Curva ad utramque Axis AP partem in infinitum ex-
 tenditur. Posita autem Abscissa x negativa Applicata fit ima-
 ginaria, hincque Axi ultra A versus T nulla Curvæ portio
 respondet.

149. Cum æquatio pro Ellipsi abeat in Parabolam, facto
 $2d = c$, manifestum est Parabolam nil aliud esse præter Ellip-
 sin, cujus Semiaxis $a = \frac{dd}{2d - c}$ fit infinitus; quam ob rem
 proprietates omnes, quas pro Ellipsi invenimus, ad Parabolam
 transferentur, posito Axe a infinito. Primum autem, cum sit
 $AF = \frac{1}{2}c$, erit $FP = x - \frac{1}{2}c$, hinc ducta ex Foco F
 ad Curvæ punctum M recta FM erit, $FM^2 = xx - cx +$
 $\frac{1}{4}cc + yy = xx + cx + \frac{1}{4}cc$, ideoque $FM = x +$

LIB. II. $\frac{1}{2} c = AP + AF$, quæ est præcipua proprietas Foci in Parabola.

150. Quoniam Parabola nascitur ex Ellipsi, Axe majore in infinitum aucto; consideremus Parabolam, tanquam esset Ellipsis, sitque ejus Semiaxis $AC = a$, existente a quantitate infinita, ita ut Centrum C infinite distet a Vertice A . Ad M ducatur tangens Curvæ MT Axi occurrens in T ; quia erat $CP : CA = CA : CT$, erit $CT = \frac{aa}{a-x}$, ob $CP = a - x$; hincque $AT = \frac{ax}{a-x}$. At, cum sit a quantitas infinita, Abscissa x præ ea evanescet, eritque $a - x = a$, ideoque $AT = x = AP$: quod idem hoc modo ostendi potest, cum sit $AT = \frac{ax}{a-x}$, erit $AT = x + \frac{xx}{a-x}$, at quia fractionis $\frac{xx}{a-x}$ denominator est infinitus, numeratore existente finito, valor fractionis erit evanescens, ideoque $AT = AP = x$.

151. Quod si ergo ex puncto M ad Centrum Parabolæ C infinite distans ducatur Linea MC , quæ erit Axi AC parallela, ea quoque erit Diameter Curvæ omnes Chordas tangenti MT parallelas bifecans. Scilicet, si ducatur Chorda seu Ordinata mn tangenti MT parallela, ea a Diametro Mp bifecabitur in p . Omnis ergo recta Axi AP parallela ducta in Parabola erit Diameter obliquangula. Ad hujusmodi Diameterum naturam eruendam sit $Mp = t$, $pm = u$, ducatur ex m ad Axem normalis msr ; erit, ob $PT = 2x$, & $MT = \sqrt{4xx + 2cx}$, $\sqrt{4xx + 2cx} : 2x :: \sqrt{2cx} = pm : ps : ms$, unde obinetur $ps = \frac{2xu}{\sqrt{4xx + 2cx}} = u \sqrt{\frac{2x}{2x + c}}$, & $ms = u \sqrt{\frac{c}{2x + c}}$; hinc erit $Ar = x + t + u \sqrt{\frac{2x}{2x + c}}$, & $mr = \sqrt{2cx} + u \sqrt{\frac{c}{2x + c}}$. Quia vero est $mr^2 = 2c \cdot Ar$,
erit

erit $2cx + 2cu\sqrt{\frac{2x}{2x+c}} + \frac{c^2uu}{2x+c} = 2cx + 2ct + 2cu\sqrt{\frac{2x}{2x+c}}$,

hincque $uu = 2t(2x+c) = 4FM.t$, seu $pm^2 = 4FM$.

Mp . At anguli obliquitatis mps erit Sinus $= \sqrt{\frac{c}{2x+c}} =$

$\sqrt{\frac{AF}{FM}}$, Cofinus $= \sqrt{\frac{2x}{2x+c}} = \sqrt{\frac{AP}{FM}}$, ideoque $\sin. 2mps =$

$\frac{2\sqrt{2cx}}{2x+c} = \frac{y}{FM} = \sin. MFp$, ergo erit angulus $mps =$

$MTP = \frac{1}{2} MFr$.

152. Quia est $MF = AP + AF$, ob $AP = AT$, erit $FM = FT$; ideoque triangulum MFT isosceles, & angulus $MFr = 2MTA$, ut modo invenimus. Cum deinde sit

$MT = 2\sqrt{x(x + \frac{1}{2}c)}$, erit $MT = 2\sqrt{AP.FM}$, hinc

ex Foco F in tangentem demisso perpendicularo erit $MS =$

$TS = \sqrt{AP.FM} = \sqrt{AT.TF}$, unde erit $AT:TS =$

$TS:TF$. Ex qua analogia perspicitur punctum S fore in recta

AS ad Axem in Vertice A normali. Erit vero $AS =$

$\frac{1}{2}PM$, & $AS:TS = AF:FS$, ergo $FS = \sqrt{AF.FM}$

& FS erit inedia proportionalis inter AF & FM . Præterea

vero erit $AS:MS = AS:TS = FS:FM = \sqrt{AF}:\sqrt{FM}$.

Quod, si ducatur ad tangentem in M normalis MW Axem

secans in W , erit $PT:PM = PM:PW$, seu $2x:\sqrt{2cx} =$

$\sqrt{2cx}:PW$; unde fit $PW = c$, ubique igitur intervallum

PW , quod in Axe inter Applicatam PM & normalem WM

intercipitur, constantem habet magnitudinem atque æquale est

femissi Lateris recti, seu Applicatæ FH . Erit autem $FW =$

$FT = FM$ & $MW = 2\sqrt{AF.FM}$.

153. Pervenimus jam ad Hyperboiam, cujus natura exprimitur hac æquatione $yy = a + 6x + \gamma xx$, Abscissis super

Diametro orthogonali sumtis. Quod si autem initium Ab-

cissarum transferatur intervallo $\frac{6}{2\gamma}$, orietur ejusmodi æquatio

LIB. II. $yy = a + \gamma xx$, in qua Abscissæ a Centro computantur. Debet autem γ esse quantitas affirmativa; quod vero ad a attinet, perinde est sive ea sit quantitas affirmativa sive negativa, permutatis enim Coordinatis x & y , affirmatio quantitatis a in negationem mutatur & vicissim. Quam ob rem sit a quantitas negativa, & $yy = \gamma xx - a$, atque apparet Applicatam γ bis evanescere: scilicet, si fuerit $x = +\sqrt{\frac{a}{\gamma}}$ & $x = -$

T A B.

I X.

Fig. 33.

$\sqrt{\frac{a}{\gamma}}$. Denotante ergo C Centro, sint A & B loca, ubi Axis a Curva trajicitur; ac, posito Semiaxe $CA = CB = a$, erit $a = \sqrt{\frac{a}{\gamma}}$, & $a = \gamma aa$, unde fit $yy = \gamma xx - \gamma aa$.

Quamdiu ergo est x^2 minor quam a^2 , Applicata erit imaginaria, unde toti Axi AB nulla Curvæ portio respondet. Sumto vero xx majore quam aa , Applicatæ continuo crescunt, atque tandem in infinitum abeunt, habebit ergo Hyperbola quatuor ramos AI , Ai , BK , Bk in infinitum excurrentes & inter se similes atque æquales, quæ est proprietas principalis Hyperbolarum.

154. Quia, posito $x = 0$, fit $yy = -\gamma aa$, Hyperbola non instar Ellipsis habebit Axem conjugatum, quod in Centro C Applicata est imaginaria. Erit ergo ipse Axis conjugatus imaginarius, quem, ut aliquam similitudinem Ellipsis servemus, ponamus $= b\sqrt{-1}$, ita ut sit $\gamma aa = bb$, & $\gamma = \frac{bb}{aa}$. Vocata ergo Abscissâ $CP = x$, & Applicata $PM = y$,

erit $yy = \frac{bb}{aa}(xx - aa)$, ideoque æquatio pro Ellipsi ante tractata $yy = \frac{bb}{aa}(aa - xx)$ transmutatur in æquationem

pro Hyperbola ponendo $-bb$ loco bb . Ob hanc ergo affinitatem proprietates Ellipsis ante inventæ facile ad Hyperbolam transferuntur. Ac primo quidem, cum pro Ellipsi distantia Focorum a Centro esset $= \sqrt{aa - bb}$, pro Hyperbola

erit

erit $CF = CG = \sqrt{(aa + bb)}$. Hinc erit $FP = x - \frac{CAP. VI.}{\sqrt{(aa + bb)}}$ & $GP = x + \sqrt{(aa + bb)}$; unde, ob $yy = -\frac{bb + \frac{bbxx}{aa}}$, fiet $FM = \sqrt{(aa + xx + \frac{bbxx}{aa} - 2x\sqrt{(aa + bb)})} = \frac{x\sqrt{(aa + bb)}}{a} - a$ & $GM = \sqrt{(aa + xx + \frac{bbxx}{aa} + 2x\sqrt{(aa + bb)})} = \frac{x\sqrt{(aa + bb)}}{a} + a$. Ductis ergo ex utroque Foco ad Curvæ punctum M rectis FM, GM erit $FM + AC = \frac{CP \cdot CF}{CA}$ & $GM - AC = \frac{CP \cdot CF}{CA}$, harum ergo rectarum differentia $GM - FM$ æqualis est $2AC$. Quemadmodum ergo in Ellipsi summa harum duarum Linearum æquatur Axi principali AB , ita pro Hyperbola differentia æqualis est Axi principali AB .

155. Hinc etiam positio tangentis MT definiiri potest, est enim perpetuo pro Lineis secundi ordinis $CP : CA = CA : CT$: unde fit $CT = \frac{a}{x}$, & $PT = \frac{xx - aa}{x} = \frac{a}{bbx}yy$; hincque $MT = \frac{y}{bbx} \sqrt{(b^4x^2 + a^4y^2)} = \frac{y}{bx} \sqrt{(aaxx + bbxx - a^4)}$. At est $FM \cdot GM = \frac{aaxx + bbxx - a^4}{aa}$, ergo $MT = \frac{ay}{bx} \sqrt{FM \cdot GM}$. Deinde est $FT = \sqrt{(aa + bb)} - \frac{aa}{x}$, & $GT = \sqrt{(aa + bb)} + \frac{aa}{x}$ ergo $FT : FM = a : x$, & $GT : GM = a : x$, unde sequitur $FT : GT = FM : GM$, quæ proportio indicat angulum FMG per tangentem MT biseccari, esseque $FMT = GMT$. Recta autem CM producta erit Diametæ obliquangula omnes Ordinatas tangentis MT parallelas biseccans.

156. Demittatur ex Centro C in tangentem perpendicularis CQ , erit $TM : PT : PM = CT : TQ : CQ$ seu $\frac{ay}{bx} \sqrt{FM \cdot GM} : \frac{aayy}{bbx} : y = \frac{aa}{x} : TQ : CQ$; unde ori-

LIB. II.

tur $TQ = \frac{a^3y}{bx\sqrt{FM \cdot GM}}$ & $CQ = \frac{ab}{\sqrt{FM \cdot GM}}$. Demittatur simili modo ex Foco F in tangentem perpendicularum FS , erit $TM : PT : PM = FT : TS : FS$, seu $\frac{a^2y}{bx}\sqrt{FM \cdot GM} : \frac{aayy}{bbx} : y = \frac{a \cdot FM}{x} : TS : FS$: unde oritur $TS = \frac{aay \cdot FM}{bx\sqrt{FM \cdot GM}}$ & $FS = \frac{b \cdot FM}{\sqrt{FM \cdot GM}}$; pariterque, si ex altero Foco G in tangentem ducatur perpendicularis G_s , erit $T_s = \frac{aay \cdot GM}{bx\sqrt{FM \cdot GM}}$ & $G_s = \frac{b \cdot GM}{\sqrt{FM \cdot GM}}$. Hinc ergo habetur $TS \cdot T_s = \frac{a^4yy}{bbxx} = \frac{aa(xx - aa)}{xx} = CT \cdot PT$, & $TS : CT = PT : T_s$. Deinde fit $FS \cdot G_s = bb$. Quia porro est $QS = Q_s$ erit $QS = \frac{TS + T_s}{2} = \frac{aay(FM + GM)}{2bx\sqrt{FM \cdot GM}} = \frac{ay\sqrt{(aa + bb)}}{b\sqrt{FM \cdot GM}} = Q_s$, unde sequitur $CS^2 = CQ^2 + QS^2 = \frac{aab^4 + a^4yy + aabbbyy}{bb \cdot FM \cdot GM} = \frac{aab^4 + (aa + bb)(bbxx - aabb)}{bb \cdot FM \cdot GM} = \frac{(aa + bb)xx - a^4}{FM \cdot GM} = aa$. Erit ergo, uti in Ellipsi, recta $CS = a = CA$. Deinde est $CQ + FS = \frac{bx\sqrt{(aa + bb)}}{a\sqrt{FM \cdot GM}}$, ideoque $(CQ + FS)^2 - CQ^2 = \frac{bbxx(aa + bb) - a^4bb}{aa \cdot FM \cdot GM} = bb$. Quare; si ducatur ex Foco F tangenti parallela FX , fecans perpendicularum CQ productum in X , erit $CX = \sqrt{(bb + CQ^2)}$, cui similis proprietas pro Ellipsi est inventa.

157. Si in Verticibus A & B ad Axem perpendiculares erigantur donec tangenti occurrant in V & v , ob $AT = \frac{a(x - a)}{x}$ & $BT = \frac{a(x + a)}{x}$, $PT : PM = AT : AV = BT : Bv$, hinc fit $AV = \frac{bb(x - a)}{ay}$ & $Bv = \frac{bb(x + a)}{ay}$; ergo
AV.

$$AV. Bv = \frac{b^4(xx - aa)}{a^2yy} = bb, \text{ seu } AV. Bv = FS. Gs.$$

$$\text{Deinde } PT:TM = AT:TV = BT:Tv; \text{ ergo } TV = \frac{b(x-a)}{xy} \sqrt{FM.GM} \text{ \& } Tv = \frac{b(x+a)}{xy} \sqrt{FM.GM}:$$

unde fit $TV.Tv = \frac{a^2}{xx} FM.GM = FT.GT.$ Simili autem modo hinc plura alia consecutaria deduci possunt.

158. Quia est $CT = \frac{a^2}{x}$, patet quo major capiatur Abcissa $CP = x$, eo minus futurum esse intervallum CT : atque adeo tangens, quæ Curvam in infinitum productam tangit, per ipsum Centrum C transibit, fietque $CT = 0$. Cum autem sit $\text{tang. } PTM = \frac{PM}{PT} = \frac{bbx}{aay}$, puncto M in infinitum

abeunte, seu posito $x = \infty$, fit $y = \frac{b}{a} \sqrt{(xx - aa)} = \frac{bx}{a}$.

Tangens ergo Curvæ in infinitum productæ, & per Centrum C transibit, & cum Axe angulum constituet ACD cujus tangens $= \frac{b}{a}$. Posita ergo in Vertice A ad Axem normali $AD = b$, tum recta CD in infinitum utrinque producta, Curvam nusquam quidem tanget, at Curva continuo magis ad eam appropinquabit, donec in infinitum tota cum recta CI confundatur. Hoc idem valebit de parte Ck , quæ tandem cum ramo Bk confundetur. Atque si ad alteram partem sub eodem angulo ducatur recta KCi , ea cum ramis BK & Bi in infinitum productis conveniet. Hujusmodi autem Lineæ rectæ, ad quas Linea quæpiam Curva continuo propius accedit, in infinitum autem excurrens demum attingit, ASYMPTOTÆ vocantur, unde Lineæ rectæ ICk , KCi sunt binæ Asymptotæ Hyperbolæ.

159. Asymptotæ ergo se mutuo in Centro C Hyperbolæ decussant, atque ad Axem inclinantur angulo $ACD = ACd$, cujus tangens $= \frac{b}{a}$, angulique dupli DCd tangens $= \frac{2ab}{aa - bb}$,
unde

LIB. II. unde patet si fuerit $b = a$, fore angulum, sub quo Asymptotæ se interfecant, $DCd =$ recto; quo casu Hyperbola *equilatera* dicitur. Cum autem sit $AC = a$, $AD = b$, erit $CD = Cd = \sqrt{(aa + bb)}$; quare, si ex Foco G in utramvis Asymptotam perpendiculum GH demittatur, ob $CG = \sqrt{(aa + bb)} = CD$, erit $CH = AC = BC = a$, & $GH = b$.

160. Producat^r Ordinata $MPN = 2y$ utrinque donec Asymptotas fecet in m & n ; erit $Pm = Pn = \frac{bx}{a}$, & $Cm = Cn = \frac{x\sqrt{(aa + bb)}}{a} = FM + AC = GM - AC$. Tum vero erit $Mm = Nn = \frac{bx - ay}{a}$ & $Nm = Mn = \frac{bx + ay}{a}$, unde fit $Mm \cdot Nm = Mm \cdot Mn = \frac{bbxx - aayy}{aa} = bb$, ob $aayy = bbxx - aabb$: erit ergo ubique $Mm \cdot Nm = Mm \times Mn = Nn \cdot Nm = Nn \cdot Mn = bb = AD^2$. Ducatur ex M Asymptotæ Cd parallela Mr ; erit $2b\sqrt{(aa + bb)} = Mm$: $mr (Mr)$, unde fit $mr = Mr = \frac{(bx - ay)\sqrt{(aa + bb)}}{2ab}$ & $Cm - mr = Cr = \frac{(bx + ay)\sqrt{(aa + bb)}}{2ab}$. Hinc ergo conficietur $Mr \cdot Cr = \frac{(bbxx - aayy)(aa + bb)}{4aabb} = \frac{aa + bb}{4}$. Vel, ducta ex A Asymptotæ Cd parallela AE , erit $AE = CE = \frac{1}{2} \sqrt{(aa + bb)}$, ideoque erit $Mr \cdot Cr = AE \cdot CE$; quæ est proprietas primaria Hyperbolæ ad Asymptotas relatæ.

T A B.
IX.
Fig. 34.

161. Quod si ergo Abscissæ $CP = x$, in una Asymptota a Centro sumantur, & Applicatæ $PM = y$ alteri Asymptotæ parallelæ statuatur, erit $yx = \frac{aa + bb}{4}$, existente $AC = BC = a$, & $AD = Ad = b$: seu, si ponatur $AE = CE = b$, erit $yx = bb$, & $y = \frac{b}{x}$. Posito ergo $x = 0$, fit $y = \infty$, ac vicissim factò $x = \infty$ fiet $y = 0$. Agatur jam per

per punctum Curvæ M recta quæcunque $QMNR$, quæ parallela sit ductæ pro libitu rectæ GH , ac ponatur $CQ = t$, $QM = u$, erit $GH : CH : CG = u : PQ : PM$, ergo $PQ = \frac{CH}{GH} u$, $PM = \frac{CG}{GH} u$: unde $y = \frac{CG}{GH} u$ & $x = t - \frac{CH}{GH} u$; quibus valoribus substitutis, erit $\frac{CG}{GH} t u - \frac{CH \cdot CC}{GH^2} \times uu = bb$, seu $uu - \frac{GH}{CH} t u + \frac{GH^2}{CH \cdot CG} bb = 0$. Habebit ergo Applicata u duplicem valorem, nempe QM & QN , quarum summa erit $= \frac{GH}{CH} t = QR$, & rectangulum $QM \times QN = \frac{GH^2}{CH \cdot CG} bb$.

162. Cum igitur sit $QM + QN = QR$, erit $QM = RN$ & $QN = RM$. Quare, si puncta M & N conveniant quo casu recta QR Curvam tanget, tum ea in ipso puncto contactus bifecabitur. Scilicet, si recta XY tangat Hyperbolam, punctum contactus Z in medio rectæ XY erit positum. Unde, si ex Z alteri Asymptotæ parallela ducatur ZV , erit $CV = VY$, hincque ad quodvis Hyperbolæ punctum Z expedite tangens ducetur. Sumatur scilicet $VT = CV$, ac recta per T & Curvæ punctum Z ducta Hyperbolam in hoc puncto Z tanget.

Cum ergo sit $CV \cdot ZV = bb = \frac{aa + bb}{4}$, erit $CX \cdot CY = aa + bb = CD^2 = CD \cdot Cd$: quocirca, si rectæ DX & dY ducerentur, ex inter se forent parallelæ; unde facillimus oritur modus quotcunque Curvæ tangentes ducendi.

163. Quoniam deinde est rectangulum $QM \cdot QN = \frac{GH^2}{GH \cdot CG} \cdot bb$, patet, ubicunque recta QR ipsi HG parallela ducatur, fore semper rectangulum $QM \cdot QN$ ejusdem magnitudinis. Erit ergo etiam $QM \cdot QN = QM \cdot MR = QN \times NR = \frac{CH^2}{CH \cdot CG} bb$. Quod, si ergo concipiatur ducta tan-

L I B. II. gens ipsi QR parallela, quia ea intra Asymptotas in puncto contactus bitembitur, & si tangentis semissis vocetur $= q$. erit semper $QM \cdot QN = QM \cdot MR = RN \cdot RM = RN \times NQ = qq$, quæ est inignis proprietates Hyperbolarum intra Asymptotas descriptarum.

164. Quoniam Hyperbola ex duabus partibus diametraliter oppositis IAi & KBk constat, istæ proprietates non solum ad eas rectas intra Asymptotas ductas pertinent, quæ eandem Curvæ partem in duabus punctis interfecant. Sed etiam ad eas, quæ ad partes oppositas pertingunt. Ducatur nempe per punctum M recta $Mqrn$ ad partem oppositam, cui parallela agatur Gh , ac vocetur $Cq = t$ & $qM = u$; erit, ob triangula CGh & PMq similia, $PM = y = \frac{CG}{Gh} u$, & $qP = x - t = \frac{Cb}{Gh} u$; unde fit $x = t + \frac{Cb}{Gh} u$. Cum autem fit $xy = bb$, fiet $\frac{CG}{Gh} t u + \frac{CG \cdot Cb}{Gh^2} u u = bb$, seu $u u + \frac{Gh}{Cb} t u - \frac{Gh^2}{CG \cdot Cb} bb = 0$.

165. Applicata ergo u habebit duplicem valorem, nempe qM & $-qn$, hoc qn existente negativo quia ad alteram partem Asymptotæ CP pro Axe assumptæ vergit. Harum ergo binarum radicum summa $qM, -qn$ erit $= -\frac{Gh}{Cb} t = -qr$, ideoque $qn - qM = qr$, unde fit $qM = rn$, & $qn = rM$. Deinde autem ex æquatione inventa intelligitur fore radicum productum $-qM \cdot qn = -\frac{Gh^2}{CG \cdot Cb} bb$, seu $qM \cdot qn = qM \cdot rM = rn \cdot qn = rn \cdot rM = \frac{Gh^2}{CG \cdot Cb} bb$. Hæc ergo rectangula, quotcunque rectæ Mn ipsi Gh parallelæ ducantur, perpetuo ejusdem erunt magnitudinis. Hæ autem sunt præcipuæ singularum specierum Linearum secundi ordinis proprietates, quæ, si cum proprietatibus generalibus conferantur, infinita fere insignium proprietatum multitudo conficitur.

C A P U T V I I.

De ramorum in infinitum excurrentium investigatione.

166. **S**I curva Linea quæcunque habeat ramum seu partem in infinitum excurrentem, atque ex ejus puncto infinite distito ad Axem quemcunque demittatur Applicata normalis; tum, vel Abscissa x vel Applicata y vel utraque Coordinata, erit infinita. Nisi enim vel alterutra vel utraque esset infinita, tum distantia puncti in Curva assumti ab initio Abscissarum foret finita nempe $= \sqrt{(xx + yy)}$, contra hypothesin. Quam ob rem, si Curva habeat ramum in infinitum excurrentem, vel Abscissæ cuiuspiam finitæ conveniet Applicata realis infinita, vel Abscissæ infinite magnæ respondebit Applicata realis, sive finita sive infinite magna. Ex hoc igitur fonte Curvarum rami in infinitum excurrentes investigari poterunt.

167. Sit proposita æquatio algebraïca inter Coordinatas x & y cujusvis ordinis, puta n ; atque scorsim considerentur termini, in quibus variables x & y obtinent n dimensiones, qui erunt $\alpha y^n + \beta y^{n-1} x + \gamma y^{n-2} x^2 + \delta y^{n-3} x^3 + \dots + \xi x^n$, quæ expressio resolubilis erit in Factores simplices formæ $Ay + Bx$, sive reales sive imaginarios. Atque, si habeat Factores imaginarios, eorum numerus erit par, binique conjuncti dabunt Factorem duplicem realem formæ $A^2 y^2 - 2ABxy \text{ cos. } \phi + B^2 x^2$. Hujusmodi autem Factor, (sive x sive y sive utraque, ponatur infinita $= \infty$,) semper valorem induet infinitum $= \infty^2$, quia terminus $2ABxy \text{ cos. } \phi$ semper minor est quam duo reliqui $A^2 y^2 + B^2 x^2$, neque enim A nec B potest esse $= 0$. Hujusmodi ergo Factor $A^2 y^2 - 2ABxy \text{ cos. } \phi +$

L 2 $B^2 x^2$,

LIB. II. B^2x^2 , si vel x vel y vel utraque ponatur infinita, neque nihilo neque quantitati finitæ, neque etiam quantitati infinitæ ∞ potest esse æqualis, cum ipsa fiat $= \infty^2$, quæ infinities major est quam ∞ .

168. Quod si ergo æquationis pars summa $\alpha y^n + \xi y^{n-1} x + \gamma y^{n-2} x^2 + \dots + \xi x^n$ nullum habeat Factorem simplicem realem, quod quidem evenire non potest, nili n sit numerus par, tum ex meris Factoribus duplicibus hujus formæ $A^2y^2 - 2ABxy.cos\phi + B^2x^2$ constabit. Quare, si vel x vel y vel utraque ponatur infinita, ipsa illa expressio valorem induet infinitum $= \infty^n$: neque igitur quantitati finitæ, neque ulli quantitati infinitæ ∞^m , cujus exponens m minor sit quam n , æqualis esse potest. Reliqua igitur æquationis membra, in quibus variabiles x & y pauciores habent dimensiones, quoniam infinita præbent minoris exponentis quam n , illud supremum infinitum adæquare non possunt; ideoque æquatio consistere non potest, si vel x vel y vel utraque statuat infinita.

169. Hinc ergo linea Curva, quæ exprimitur æquatione inter Coordinatas x & y , cujus supremum membrum nullos habet Factores simplices reales, nullos habebit ramos in infinitum excurrentes, ideoque tota Curva continebitur in spatio finito, instar Ellipsis seu Circuli. Quam ob rem, si in æquatione generali secundi Ordinis $\alpha y^2 + \xi xy + \gamma xx + \delta y + \epsilon x + \zeta = 0$, membrum supremum, $\alpha yy + \xi xy + \gamma xx$, in quo variabiles x & y duas obtinent dimensiones, non habeat Factores simplices reales, quod evenit si $\xi\xi$ sit major quam $4\alpha\gamma$, tum Curva nullum habebit ramum in infinitum excurrentem, critque adeo Ellipsis.

170. Quo hæc distinctius evolvere liceat, omnem æquationem inter Coordinatas x & y propositam, ita in membra distin-

distinguiamus, ut ad supremum seu primum referamus omnes æquationis terminos, in quibus variabiles x & y eandem summam dimensionem, cujus exponens sit n , teneant. Ad secundum vero membrum refero omnes terminos, in quibus variabiles ambæ $n - 1$ dimensiones constituunt. Tertium membrum continebit eos terminos, in quibus ipsorum x & y numerus dimensionum est $n - 2$, & ita porro, donec perveniatur ad membrum ultimum, in quo nulla inest dimensio ipsarum x & y , & quod propterea sola quantitate constante constabit. Sit autem P membrum primum seu supremum, Q membrum secundum, R membrum tertium, S quartum & ita porro.

171. Quoniam igitur, si membrum supremum P nullum habet Factorem simplicem realem, Linea curva, æquatione $P + Q + R + S + \&c. = 0$ indicata, nullum habet ramum in infinitum excurrentem; ponamus jam membrum supremum P unicum habere Factorem simplicem realem, $ay - bx$, ita ut sit $P = (ay - bx)M$, existente M Functione ipsarum x & y , dimensionum $n - 1$, quæ nullos habeat Factores simplices reales. Posita ergo vel x vel y vel utraque infinita, fiet $M = \infty^{n-1}$; Q vero simile poterit esse infinitum, at $R, S, \&c.$, fient infinita minorum graduum. Consequenter æquatio $P + Q + R + \&c. = 0$ poterit subsistere, si fuerit $ay - bx =$ quantitati finitæ, vel nihilo, ideoque Curva in infinitum porrigetur.

172. Sit ergo $ay - bx = p$, existente p quantitate finita, quæ ita debet esse comparata ut, Curva in infinitum abeunte, fiat $pM + Q + R + S + \&c. = 0$ seu $p = \frac{-Q - R - S \&c.}{M}$. At, cum M sit quantitas infinita superioris ordinis quam R & $S \&c.$, erunt fractiones $\frac{R}{M}, \frac{S}{M}, \&c. = 0$, ideoque $p = \frac{-Q}{M}$. Hanc ob rem fractio $\frac{-Q}{M}$ dabit valorem ipsius p , si varia-

LIB. II. biles x & y fiant infinitæ. Cum autem sit $ay - bx = p$,
 erit $y = \frac{bx+p}{a}$ & $\frac{y}{x} = \frac{b}{a} + \frac{p}{ax} = \frac{b}{a}$ ob $\frac{p}{ax} = 0$ si
 $x = \infty$. Curva ergo in infinito nabeunte fit $y = \frac{bx}{a}$.

173. Cum igitur Q & M sint Functiones homogeneæ $n-1$
 dimensionum, erit $\frac{Q}{M}$ Functio nullius dimensionis, ideo-
 que si ponatur $y = \frac{bx}{a}$, præbebit valorem constantem pro p .

Vel, quia Functio $\frac{Q}{M}$ determinatur, si tantum ratio inter
 y & x determinetur, quæ est $b:a$, valor ipsius p obtinebitur
 si in expressione $\frac{Q}{M}$, ubique b loco y & a loco x scribatur.
 Invento ergo hoc modo p erit $ay - bx = p$, quæ æquatio in
 ipsa æquatione proposita $P + Q + R + S + \&c. = 0$ contine-
 tur, si Curva abeat in infinitum.

174. Portio itaque Curvæ in infinitum extensa ipsa expri-
 metur per hanc æquationem $ay - bx = p$; quæ cum sit pro
 Linea recta, hæc Linea recta in infinitum producta tandem
 cum Linea curva confunderetur. Erit ergo Linea recta hæc Cur-
 væ asymptota, quoniam Linea curva in infinitum porrecta cum
 recta congruet, ideoque continuo propius ad eam accedet. Atque
 cum æquatio proposita $P + Q + R + S + \&c. = 0$, polito x
 vel $y = \infty$, abeat in æquationem $ay - bx = p$, simul intel-
 ligitur hanc Lineam rectam utrinque in infinitum productam
 tandem cum Curva congruere. Quam ob rem Linea curva
 duos habebit ramos in infinitum excurrentes inter se oppositos,
 quorum alter cum ista Linea recta antrosum, alter cum eadem
 retrorsum infinite producta conveniet.

175. Cum igitur Curva, si æquationis $P + Q + R + S +$
 $\&c. = 0$, membrum supremum P unicum habeat Factorem
 simplicem realem, prædita sit duobus ramis in infinitum exten-
 sis, atque ad eandem Lineam rectam utrinque convergentibus,
 quæ Linea recta ejus Asymptota vocatur; nunc ponamus supre-
 mum

num membrum P duos habere Factores simplices reales $ay - bx$ CAP.VII. & $cy - dx$, ita ut sit $P = (ay - bx)(cy - dx)M$, crit M ———
 Functio homogenea $n - 2$ dimensionum. Duo autem casus hic perpendendi veniunt, prout isti bini Factores fuerint inter se æquales vel inæquales.

176. Sint hi Factores inter se inæquales; atque manifestum est æquationem $(ay - bx)(cy - dx)M + Q + R + S + \&c. = 0$, duplici modo subsistere posse, pro Abscissis vel Applicatis infinitis, vel si $ay - bx$ vel si $cy - dx$ æquetur quantitati finitæ. Sit igitur $ay - bx = p$; &, cum p sit quantitas finita, in infinito erit $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$, atque ut ante fiet $p =$

$$\frac{Q + R + S + \&c.}{(cy - dx)M} = \frac{Q}{(cy - dx)M}$$
, quæ est Functio

nullius dimensionis ipsarum x & y ; quare, si ponatur $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$, vel, quod eodem redit, si ubique scribatur b loco y & a loco x , verus prodibit valor constantis quæsitæ p . Erit ergo $p = \frac{Q}{(bc - ad)M}$, &, ob Factores inæquales, $bc - ad$ non erit $= 0$, neque etiam M , quia nullum omnino Factorem realem simplicem complectitur, in nihilum abire potest; unde valor pro p oritur finitus, vel etiam $= 0$, quod evenit, si vel membrum Q profusus desit, vel Factorem habeat $ay - bx$.

177. Ob supremi ergo membri P Factorem realem simplicem $ay - bx$, Curva, uti in priori casu, unam habebit Asymptotam, cujus positio indicatur æquatione $ay - bx = p$. Simili vero modo, ob alterum Factorem $cy - dx$, quoque habebit Asymptotam, quam præbebit æquatio hæc: $cy - dx = q$, existente $q = \frac{Q}{(ay - bx)M}$, postquam ubique loco y & x hi valores determinati d & c fuerint substituti. Quocirca Linea curva omnino duas habebit Asymptotas, ideoque quatuor ramos in infinitum extensos, qui cum illis rectis tandem congruant. Hic ipse autem casus locum supra invenit in Hyperbola.

LIB. II. parabola : quare, si in æquatione pro Lineis secundi ordinis
 $\alpha y y + \xi x y + \gamma x x + \delta y + \epsilon x + \zeta = 0$ supremum membrum
 $\alpha y y + \xi x y + \gamma x x$ duos habeat Factores simplices inæquales
 reales, quod evenit si $\xi\xi$ superet $4\alpha\gamma$, tum Curva erit Hy-
 perbola.

178. Sint ambo Factores $\alpha y - bx$ & $\epsilon y - dx$ inter se æ-
 quales ita ut sit $P = (\alpha y - bx)^2 M$. Cum igitur sit $P +$
 $Q + R + S + \&c. = 0$, erit $(\alpha y - bx)^2 = \frac{-Q - R - S \&c.}{M}$.
 Quia autem est Q Functio $n - 1$; R $n - 2$; & S Functio
 $n - 3$ dimensionum, ob M Functionem $n - 2$ dimensionum
 erit, casu infiniti, $\frac{S}{M} = 0$, ideòque $(\alpha y - bx)^2 = \frac{-Q}{M} -$
 $\frac{R}{M} = \frac{-Q}{M(\mu y + \nu x)} (\mu y + \nu x) - \frac{R}{M}$. At est $\frac{Q}{M(\mu y + \nu x)}$ &
 $\frac{R}{M}$ Functio nullius dimensionis ipsarum x & y . Quare, cum
 in infinito sit $y : x = b : a$, si hæc ratio $\frac{b}{a}$ pro $\frac{y}{x}$ seu b pro
 y & a pro x substituatur, utraque illa Functio abibit in quan-
 titatem constantem.

179. Fiat ergo, facta hac substitutione, $\frac{Q}{M(\mu y + \nu x)} = A$
 & $\frac{R}{M} = B$; eritque $(\alpha y - bx)^2 = -A(\mu y + \nu x) - B$,
 quæ est æquatio pro Linea curva cum qua Linea curva æqua-
 tione $P + Q + R + S + \&c. = 0$ expressa, postquam in in-
 finitum processerit, confundetur. Verum, quia quantitates μ &
 ν sunt arbitrariæ, sumatur $\mu = b$ & $\nu = a$, ac, immutandis
 Coordinatis, fiat $\alpha y - bx = u \sqrt{aa + bb}$ & $by + ax =$
 $t \sqrt{aa + bb}$, eritque pro eadem illa Curva ista æquatio $uu +$
 $\frac{At}{\sqrt{aa + bb}} + \frac{B}{aa + bb} = 0$, quam patet esse pro Parabola.
 Curva ergo quæsitæ ita erit comparata, ut in infinitum pro-
 tensa cum Parabola confundatur. Habebit ergo duos tantum
 ramos

ramos in infinitum excurrentes, quorum Asymptota non erit Li- CAP. VII.
nea recta, sed Parabola superiore æquatione expressa.

180. Evenit hoc si non fuerit $A = 0$: at si sit $A = 0$ (quod evenit si membrum secundum Q vel desit vel divisibile fuerit per $ay - bx$,) tum æquatio cessat esse pro Parabola, eritque $uu + \frac{B}{aa + bb} = 0$, cujus tres casus erunt evolvendi.

Primo scilicet, si B fuerit quantitas negativa, puta $\frac{B}{aa + bb} = -ff$, æquatio $uu - ff = 0$ duas in se complectetur æquationes $u - f = 0$ & $u + f = 0$, quæ erunt pro duabus Lineis rectis inter se parallelis, quarum utraque erit Curvæ Asymptota, uti casu primo: atque ideo Curva quatuor habebit ramos in infinitum excurrentes qui cum istis duabus rectis confundentur.

181. Secundus casus est quod sit B quantitas affirmativa, puta $+ff$. Quia vero hoc casu æquatio $uu + ff = 0$ est impossibilis, Curva nullum habebit ramum in infinitum excurrentem, sed tota in spatio finito continebitur. Non solum igitur Curva, quæ hac æquatione $P + Q + R + S + \&c. = 0$, continetur, nullum habebit ramum in infinitum extensum, si membrum supremum P nullum habeat Factorem simplicem realem, sed etiam idem usu venire potest, quamvis P habeat Factores, uti modo vidimus. Plures autem hujusmodi casus adhuc occurrent.

182. Tertius casus est quo fit etiam $B = 0$, in quem uterque præcedentium incidere potest, ex quo ambiguum est, quomodo Curva futura sit comparata. Hinc ad figuram Curvæ definiendam sequentes termini spectari debebunt. Scilicet, cum sit $P + Q + R + S + \&c. = 0$, atque $P = (ay - bx)^2 M$, in infinito erit $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$; & $(ay - bx)^2 + \frac{Q}{M} + \frac{R}{M} + \frac{S}{M} + \frac{T}{M} + \&c.$ Ponatur ergo, ut ante, facta substitutione $\frac{y}{x} =$

LIB. II. $\frac{b}{a}, \frac{Q}{M} = A(by + ax), \frac{R}{M} = B$; tum vero cum $S, T, V, \&c.$, sint Functiones $(n - 2), (n - 3), \&c.$ dimensionum, existente M Functione $(n - 1)$ dimensionum, $\frac{S(by + ax)}{M} = C; \frac{T(by + ax)^2}{M} = D; \frac{V(by + ax)^3}{M} = E \&c.$,

erit $(ay - bx)^2 + A(by + ax) + B + \frac{C}{by + ax} + \frac{D}{(by + ax)^2} + \frac{E}{(by + ax)^3} + \&c. = 0$. Hec ergo æquatio exprimit naturam curvæ Lineæ, cujus portio in infinitum distans, quæ prodit si $by + ax$ ponatur infinitum, conveniet cum Curva in æquatione $P + Q + R + S + \&c. = 0$, contenta. Quamvis enim, Curva in infinitum excurrente, $(ay - bx)^2$ valorem obtineat vel finitum vel infinitum ordinis tamen inferioris quam ∞^2 , tamen $by + ax$ valorem habebit infinitum.

183. Mutemus autem Axem, ad quem Lineam istam Asymptotam inventam referamus, ac in eo ponamus Abscissam $\frac{ax + by}{\sqrt{aa + bb}} = t$, & Applicatam, $\frac{ay - bx}{\sqrt{aa + bb}} = u$; sitque, brevitatis gratia, $\sqrt{aa + bb} = g$, atque erit æquatio $uu + \frac{At}{g} + \frac{B}{gg} + \frac{C}{g^3t} + \frac{D}{g^4tt} + \frac{E}{g^5t^3} + \&c. = 0$. Cum igitur in casu, quem evolvere debemus, sit $A = 0$, & $B = 0$, fiet $uu + \frac{C}{g^3t} + \frac{D}{g^4tt} + \frac{E}{g^5t^3} + \&c. = 0$. Quod, si jam non fuerit $C = 0$, posito t infinito, termini $\frac{D}{g^4tt} + \frac{E}{g^5t^3} + \&c.$, præ $\frac{C}{g^3t}$ evanescent, eritque $uu + \frac{C}{g^3t} = 0$; qua æquatione natura Lineæ curvæ continetur, quæ, posito $t = \infty$, cum Curva quaesita confundetur. Quare, cum hinc sit $u = \pm \sqrt{\frac{C}{g^3t}}$ Curva duos habebit ramos ad eandem Axis partem utrinque convergentes.

184. Quod si insuper fuerit $C = 0$, tum sumenda est ista æquatio

æquatio $uu + \frac{D}{g^{\star}t} = 0$, ubi iterum tres casus occurrunt prout

D fuerit quantitas affirmativa, vel negativa, vel nulla. Primo casu, ob æquationem impossibilem, Curva nullum habebit ramm in infinitum excurrentem, sed tota continebitur in spatio finito. Secundo casu, si $\frac{D}{g^{\star}} = -ff$ ob $uu = \frac{ff}{t}$; quia posito tam $t = +\infty$ quam $t = -\infty$, Applicata u duplicem obtinet valorem evanescentem, affirmativum & negativum, Curva habebit quatuor ramos ad Axem utrinque ad utramque partem convergentes. Tertio autem casu, quo $D = 0$, sumenda est æquatio $uu + \frac{E}{g^{\star}t^3} = 0$, cujus par est ratio, atque in §. præcedente: sicque consideratio continuari debet, quoad æquatio $P + Q + R + S + \&c.$, terminos ultiores suppeditat.

185. Ponamus nunc membrum supremum P æquationis $P + Q + R + S + \&c. = 0$, tres habere Factores simplices reales; atque manifestum est, si isti Factores fuerint inter se inæquales, tum de unoquoque valere ea, quæ supra de unico Factore reali sunt expõsita; quo ergo casu Curva habebit sex ramos in infinitum excurrentes, ad tres Lineas rectas Asymptotas convergentes. Si bini Factores fuerint æquales, tum de tertio inæquali idem erit tenendum, quod ante: at de duobus æqualibus eadem præcepta sunt notanda, quæ ante dedimus. Tantum ergo superest casus tertius evolvendus, quo omnes tres Factores sunt inter se æquales. Sit igitur $P = (ay - bx)^3 M$. Et, quia æquatio $P + Q + R + S + \&c. = 0$, subsistere non potest in infinito, nisi $(ay - bx)^3$ habeat valorem vel finitum, vel infinitum quidem ad ordinis inferioris quam ∞^3 , quo potestas infiniti, in quam membrum supremum P abit, fiat minor quam ∞^n ; erit utique in infinito $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$.

186. Ad hunc casum exponendum primum spectari oportet membrum secundum Q , utrum id Factorem habeat eundem $ay - bx$ an secus: ubi notandum est si omnino desit, tum

LIB. II. in priori contineri, quia nihilum quemcunque Factorem agnoscit. Primum itaque non sit Q per $ay - bx$ divisibile. Et, cum Q sit Functio $n - 1$ dimensionum, M vero Functio $n - 3$ dimensionum, erit $\frac{Q}{(ax + by)^2 M}$ Functio nullius dimensionis, ideoque posito $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$, abibit in quantitatem constantem, quæ sit $= A$, eritque $(ay - bx)^3 + A(ax + by)^2 = 0$, sequentia enim membra præbebunt terminos, qui in infinito præ $A(ax + by)^2$ evanescunt.

187. Linea igitur curva, quæ hac æquatione exprimitur, ita erit comparata, ut in infinitum producta cum Linea curva æquatione $P + Q + R + S + \&c.$, expressa congruat. Ad illam autem propius cognoscendam, eam ad alium Axem referamus, in quo sit Abscissa $t = \frac{ax + by}{g}$ & Applicata $u = \frac{ay - bx}{g}$ posito $\sqrt{(aa + bb)} = g$, eritque $u^3 + \frac{Att}{g} = 0$, quæ æquatio, si ponatur $t = \infty$, dabit partem Curvæ quæ sitæ $P + Q + R + \&c. = 0$, in infinito existentem. Quare, si figura Curvæ $u^3 + \frac{Att}{g} = 0$, cognita fuerit, simul Curvæ $P + Q + R + \&c. = 0$, portionis infinitæ figura erit cognita. In Capite autem sequente has Lineas curvas Asymptotas data opera evolvemus.

188. Quod si membrum, secundum Q Factorem habeat $ay - bx$; vel simul erit divisibile per $(ay - bx)^2$, vel secus. Ponamus non esse divisibile per $(ay - bx)^2$, ac sumatur ista Functio nullius dimensionis $\frac{Q}{(ay - bx)(ax + by)M}$, quæ, posito $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$, præbeat istam quantitatem constantem A , eritque $(ay - bx)^3 + A(ay - bx)(ax + by) + \frac{R}{M} + \frac{S}{M} + \&c = 0$. Hic erit $\frac{R}{M}$, posito $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$ vel $B(ay - bx)$ vel $B(ax +$

$B(ax + by)$, prout R fuerit per $ay - bx$ divisibile vel minus; verum $\frac{S}{M}$ erit quantitas constans C . Hinc, ista æquatione ad alium $Axem$ relata, inter Coordinatas t & u , ut ante

fecimus, ea erit vel $u^3 + \frac{Atu}{g} + \frac{Bu}{g^2} + \frac{C}{g^3} = 0$, vel $u^3 + \frac{Atu}{g} + \frac{Bt}{g^2} + \frac{C}{g^3} = 0$. Quia autem tantum casus huc spectat cum $t = \infty$, termini ultimi evanescent. Eritque ergo priori casu $u^3 + \frac{Atu}{g} + \frac{Bu}{g^2} = 0$, quæ duplicem præbet Asymptotam nempe & $u = 0$, & $uu + \frac{At}{g} = 0$, alteram rectam, alteram Parabolam. Posteriori casu quoque, existente $t = \infty$, vel u hæbebit valorem finitum, eritque, ob finitâ præ infinitis evanescentia, $\frac{Atu}{g} + \frac{Bt}{g^2} = 0$, ideoque $u = \frac{B}{Ag}$ pro Linea recta. Præterea vero u valorem infinitum habere poterit; sicque, evanescente termino tertio, fiet $u^2 + \frac{At}{g} = 0$, pro Parabola. Quare utroque casu duplex prodit Asymptota, altera recta altera Parabola, ex quo hos casus a se distingui non opus est.

189. Sit Q etiam per $(ay - bx)^2$ divisibile, atque prout R per $(ay - bx)$ fuerit divisibile vel secus, iisdem, quibus ante, operationibus institutis, prodibunt inter t & u hæ æquationes: vel $u^3 + \frac{Au^2}{g} + \frac{Bu}{g^2} + \frac{C}{g^3} = 0$, vel $u^3 + \frac{Au^2}{g} + \frac{Bt}{g^2} = 0$. Prior casus est pro tribus Lineis rectis inter se parallelis, si quidem omnes æquationis $u^3 + \frac{Au^2}{g} + \frac{Bu}{g^2} + \frac{C}{g^3} = 0$ radices fuerint reales, vel pro unica recta Asymptota, si duæ radices fuerint imaginariæ. Hinc vero varietates nascuntur prout trium istarum Asymptotarum inter se parallelarum vel bi-

LIB. II.

næ vel omnes coincidunt. Posterior autem casus $u^3 + \frac{A u^2}{g} + \frac{B t}{g^2} = 0$, posito $t = \infty$, locum habere nequit nisi u sit infinitum, ideoque terminus $\frac{A u^2}{g}$ præ primo u^3 evanescet, eritque $u^3 + \frac{B t}{g^2} = 0$, æquatio pro Asymtota curvilinea ordinis tertii.

190. Sin autem fuerit $A = 0$, $B = 0$, & $C = 0$, tum recurrendum est ad terminos æquationis $P + Q + R + S + \&c. = 0$ sequentes, qui præbebunt hujusmodi æquationem $u^3 + \frac{D}{g^4 t} + \frac{E}{g^5 t^2} + \frac{F}{g^6 t^3} + \&c. = 0$, in qua, nisi sit $D = 0$, tertius cum sequentibus evanescit, ut sit $u^3 + \frac{D}{g^4 t} = 0$; sin & $D = 0$, erit $u^3 + \frac{E}{g^5 t^2} = 0$; & si etiam $E = 0$, erit $u^3 + \frac{F}{g^6 t^3} = 0$, &c., quæ æquationes Lineas curvas denotant, quæ, posito $t = \infty$, cum Curva in æquatione $P + Q + R + \&c. = 0$, contenta congruant. Istæ autem æquationes, quia inest potestas impar u^3 , semper sunt reales, ideoque certo ramos in infinitum excurrentes, declarant. Interim tamen pro his iisdem casibus Linea recta æquatione $u = 0$, expressa quoque erit Asymtota, quia est Asymtota Curvarum $u^3 + \frac{D}{g^4 t} = 0$, $u^3 + \frac{E}{g^5 t^2} = 0$ &c.

191. Cum igitur rami Curvarum ad Asymtotam rectam convergentes tantopere discrepare queant, convenit hanc diversitatem diligentius perpendere, quod fiet, si Linea curva simplicissima definiatur, quæ ad eandem Asymtotam rectam relata cum Curva proposita confundatur. Sic, etsi æquatio $u^3 + \frac{A u^2}{g} + \frac{B u}{g^2} + \frac{C}{g^3} = 0$, si radices omnes habeat reales, tres ostendit Asymtotas rectas inter se parallelas, tamen nondum patet

patet utrum crura Curvæ in infinitum extensa sint Hyperbolica, hoc est æquatione $u = \frac{C}{t}$ expressa, an alius generis, CAP.VII.

veluti æquatione $u = \frac{C}{t^2}$, vel $u = \frac{C}{t^3}$ &c., expressa. Ad hoc cognoscendum sumatur sequens proximus terminus quem æquatio suggerit, nempe $\frac{D}{g^4 t}$, vel, si hic desit, $\frac{E}{g^5 t^2}$, vel etiam, hoc deficiente, $\frac{F}{g^6 t^3}$: Sumamus, ut rem generaliter absolvamus, terminum sequentem esse $\frac{K}{t^k}$: atque ex natura æquationis

$P + Q + R + \&c. = 0$, quæ est n dimensionum, patet k non posse esse numerum majorem quam $n - 3$. Sint æquationis $u^3 + \frac{Au^2}{g} + \frac{Bu}{g^2} + \frac{C}{g^3} = 0$, radices seu Factores $(u - \alpha)(u - \epsilon)(u - \gamma)$, eritque $(u - \alpha)(u - \epsilon)(u - \gamma) - \frac{K}{t^k} = 0$. Sit $u - \alpha = \frac{I}{t^\mu}$, quæ æquatio exprimet natu-

ram unius Asymptotæ, eritque $\frac{I}{t^\mu} (\alpha - \epsilon + \frac{I}{t^\mu})(\alpha - \gamma + \frac{I}{t^\mu}) = \frac{K}{t^k}$; & , posito t infinito, fit $\frac{(\alpha - \epsilon)(\alpha - \gamma)I}{t^\mu} = \frac{K}{t^k}$.

192. Æquatio hæc obtinet, si radix α fuerit inæqualis reliquis radicibus ϵ & γ , hocque casu fiet $I = \frac{K}{(\alpha - \epsilon)(\alpha - \gamma)}$ & $\mu = k$, unde radix $u = \alpha$ suppedabit istam Asymptotam Curvileam $u - \alpha = \frac{K}{(\alpha - \epsilon)(\alpha - \gamma)t^k}$. Si ergo omnes tres radices fuerint inter se inæquales, singulæ hujusmodi Asymptotas præbent. Sin autem duæ radices sint æquales, puta

LIB. II. puta $\zeta = \alpha$, binæ Afymtotæ coalescent in unam, eritque

$$\frac{I^2(\alpha - \gamma)}{t^{2\mu}} = \frac{K}{t^k}$$
, unde fit $I^2 = \frac{K}{\alpha - \gamma}$ & $2\mu = k$. Quia-
 re hujus duplicis Afymtotæ natura exprimitur hac æquatione

$$(u - \alpha)^2 = \frac{K}{(\alpha - \gamma)t^k}$$
. Si omnes tres radices fuerint æ-
 quales, ideoque tres Afymtotæ in unam concrefcant, ejus na-
 tura exprimitur hac æquatione $(u - \alpha)^3 = \frac{K}{t^k}$.

193. Quod si æquationis $P + Q + R + S + \&c.$, supre-
 mum membrum P quatuor habeat Factores simplices reales, si
 ii fuerint vel omnes inæquales inter se, vel bini æquales, vel
 etiam tres æquales, ex antecedentibus natura ramorum in in-
 finitum excurrentium una cum Afymtotis colligetur. Unicus
 ergo casus, quo omnes radices sunt inter se æquales, explana-
 tione indiget. Sit igitur $P = (ay - bx)^4 M$, ut fit M
 Functio $n - 4$ dimensionum; atque, si in Functionibus nul-
 lius dimensionis, uti supra, ponatur $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$, ut præbeant
 quantitates constantes, simulque ponatur, mutato Axe, $t =$
 $\frac{ax + by}{g}$ & $u = \frac{ay - bx}{g}$, existente $g = \sqrt{(aa + bb)}$, pro
 Lineis Afymtotis sequentes inter t & u orientur æquationes.
 Primum scilicet, si Q non fuerit divisibile per $ay - bx$, habe-
 bitur $u^4 + \frac{At^3}{g} = 0$.

194. Deinde, si Q fit divisibile quidem per $ay - bx$ at non
 per $(ay - bx)^4$, prodibit $u^4 + \frac{Attu}{g} + \frac{Btt}{gg} = 0$, in qua,
 posita $t = \infty$, Applicata u potest esse vel quantitas finita
 vel infinita, ergo duplex prodit Afymtota, recta scilicet $u +$
 $\frac{B}{gA} = 0$, & Curva $u^4 + \frac{Att}{g} = 0$. Quod ad rectam attinet,
 ad eam propius cognoscendam sumatur terminus sequens pro-
 ximus,

ximus, qui sit $\frac{K}{t^k}$, ac reperietur $u + \frac{B}{g^k A} + \frac{gK}{A t^k + 2} = 0$, CAP. VII.

quæ est æquatio pro Curva, cujus pars respondens Abscissæ $t = \infty$ cum Curva quæsitâ confundetur.

195. Sit nunc Q divisibile per $(ay - bx)^2$ at non per $(ay - bx)^3$, videndum est utrum R sit divisibile per $ay - bx$ an fecus. Priori casu prodibit $u^4 + \frac{Atu^2}{g} + \frac{Btu}{gg} + \frac{Ct}{g^3} = 0$; po-

steriori vero $u^4 + \frac{Atu^2}{g} + \frac{Btt}{gg} + \frac{Ct}{g^3} = 0$. Prior casus duplicem dat æquationem, prout u est finitum aut infinitum, ideoque resolvitur in has duas æquationes $uu + \frac{Bu}{gA} + \frac{C}{ggA} = 0$,

& $u^2 + \frac{At}{g} = 0$; quarum illa, si radices habet ambas reales & inæquales, præbet duas rectas parallelas, sin autem radices sint imaginariæ, nullum ostendit ramum in infinitum ex-

currentem: hæc vero $u^2 + \frac{At}{g} = 0$, dat Parabolam Asym-

totam. Posterior æquatio $u^4 + \frac{Atu^2}{g} + \frac{Btt}{gg} = 0$, (ob evanescentem $\frac{Ct}{g^3}$ præ $\frac{Btt}{gg}$, facto $t = \infty$,) duas continet æqua-

tiones formæ $uu + at = 0$, ideoque duæ prodeunt Parabolæ Asymptotæ, si fuerit A^2 major quam $4B$, quæ in unam coeunt si $A^2 = 4B$, at penitus imaginariæ evadunt si A^2 minor quam $4B$, quo casu nullus Curvæ ramus in infinitum excurrens designatur.

196. Sit jam Q divisibile per $(ay - bx)^3$; atque, prout R & S fuerint divisibilia vel non per $ay - bx$, obtinebuntur sequentes æquationes.

LIB. II.

$$\begin{aligned}
 u^4 + \frac{Au^3}{g} + \frac{Bu^2}{g^2} + \frac{Cu}{g^3} + \frac{D}{g^4} &= c \\
 u^4 + \frac{Au^3}{g} + \frac{Bu^2}{g^2} + \frac{Ct}{g^3} &= 0 \\
 u^4 + \frac{Au^3}{g} + \frac{But}{g^2} + \frac{Ct}{g^3} &= 0 \\
 u^4 + \frac{Au^3}{g} + \frac{Btt}{gg} &= 0
 \end{aligned}$$

Harum æquationum prima est pro quatuor rectis inter se parallelis, si quidem omnes radices fuerint reales & inæquales, radices autem æquales duas pluresve in unam colligent. At vero radices imaginariæ penitus vel duas vel omnes e medio tollunt. In æquatione secunda, ob $t = \infty$, Applicata u non potest non esse infinita, eritque ergo $u^4 + \frac{Ct}{g^3} = 0$, Asymptota Curvæ quarti ordinis. Ex æquatione tertia finitum valorem habere potest $u + \frac{C}{gB} = 0$, præterea vero habet hanc $u^3 + \frac{Bt}{gg} = 0$, Lineam tertii ordinis pro Asymptota. Denique æquatio quarta, ob u infinitum si $t = \infty$, abit in $u^4 + \frac{Btt}{gg} = 0$, quæ æquatio, si B est quantitas affirmativa, est impossibilis, sin negativa, designat duas Parabolas ad Verticem oppositas, quæ in infinitum productæ cum Curvæ confundentur.

197. Ex his igitur jam via patet, qua ulterius progredi licet, si plures Factores simplices supremi membri P inter se fuerint æquales. Quod enim ad Factores inæquales attinet, eorum quisque seorsim considerari atque Linea recta Asymptota ex eo nata definiri potest. Sin autem duo Factores fuerint æquales, tum per ea, quæ §. §. 178. & sequentibus sunt tradita, indoles Curvæ definiri potest; Similique modo pro tribus Factoribus æqualibus negotium conficiet §. §. 185. & sequentes; atque casum, quo quatuor Factores sunt æquales, modo evolv-

evolvimus, ex quo simul plurium Factorum æqualitas tractari potest. Ceterum, hinc perspicitur quanta multiplicitas ac varietas in Lineis curvis tantum ratione ramorum in infinitum excurrentium locum habere queat; varietatem enim, quæ in spatio finito inesse potest, nondum attigimus.

CAPUT VIII.

De Lineis Asymptotis.

198. **I**N Capite præcedente vidimus plures dari Asymptotarum species; præter Lineam rectam enim invenimus plures Lineas curvas Asymptotas hac æquatione $u^m = Cx^p$ expressas. Atque ipsa Linea recta suppeditavit alias Asymptotas Curvilineas, cum quibus Linea curva magis convergat, quam cum Linea recta. Quoties autem Linea recta reperitur esse Asymptota cujuspiam Curvæ, toties Linea curva eandem rectam pro Asymptota habens assignari poterit, quæ etiam sit Asymptota Curvæ propositæ. Hujusmodi autem Asymptota Curvilinea multo accuratius exprimit indolem Curvæ, cujus est Asymptota; ostendit enim simul ramorum numerum cum recta convergentium, atque plagam, utrum supra an infra, an antorsum retrorsumve ad rectam appropinquent.

199. Hæc igitur infinita Asymptotarum varietas commodissime in ordinem digeretur, si iptum fontem, unde eas sumus adepti, sequamur. Alias scilicet Asymptotas præbent singuli membri supremi Factores inter se inæquales, alias bini Factores æquales, alias terni æquales, alias quaterni, & ita porro. Sit itaque proposita æquatio cujusque ordinis n inter Coordinatas x & y , quæ sit $P + Q + R + S + \&c. = 0$, ubi P sit membrum supremum continens omnes terminos n dimensionum, Q sit membrum secundum continens terminos $n - 1$

LIB. II. dimensionum, similique modo R tertium, S quartum, & ita porro.

TAB. X. 200. Sit jam $ay - bx$ Factor simplex ipsius P , cui alius similis non addit; ac ponatur $P = (ay - bx)M$, eritque M Functio homogenea $n - 1$ dimensionum non divisibilis per $ay - bx$. Sit nimirum AZ Axis, in quo sit Abscissa $AP = x$ & Applicata $PM = y$. Quo Factor $ay - bx$ succinctius exprimitur, sumatur alia recta AX pro Axe secans priorem in ipso Abscissarum initio A & faciens angulum XAZ , cujus tangens $= \frac{b}{a}$, ideoque sinus $= \frac{b}{\sqrt{(aa+bb)}}$ & cosinus $= \frac{a}{\sqrt{(aa+bb)}}$. In hoc Axe ponatur Abscissa $AQ = t$, & Applicata $QM = u$; erit, ductis Pg , Pf novis Coordinatis u & t parallelis, $Pg = Qf = \frac{bx}{\sqrt{(aa+bb)}}$; $Ag = \frac{ax}{\sqrt{(aa+bb)}}$; $Mf = \frac{ay}{\sqrt{(aa+bb)}}$; $Pf = Qg = \frac{by}{\sqrt{(aa+bb)}}$; ideoque $t = Ag + Qg = \frac{ax+by}{\sqrt{(aa+bb)}}$; & $u = Mf - Qf = \frac{ay-bx}{\sqrt{(aa+bb)}}$. Erit ergo nunc Applicata u Factor supremi membri P .

201. Ex his erit vicissim $y = \frac{au+bt}{\sqrt{(aa+bb)}}$ & $x = \frac{at-bu}{\sqrt{(aa+bb)}}$; qui valores si in æquatione $P + Q + R + \&c. = 0$, substituantur, prodibit æquatio pro Curva eadem ad Axem AX relata, inter t & u . Ut autem coefficientium multitudinem evitemus, sustineant $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \&c.$ loca omnium coefficientium; ac, facta substitutione, singulæ litteræ sequentes valores induent.

$M =$

$$M = \alpha t^{n-1} + \alpha t^{n-2} u + \alpha t^{n-3} u^2 + \&c.$$

$$Q = \zeta t^{n-1} + \zeta t^{n-2} u + \zeta t^{n-3} u^2 + \&c.$$

$$R = \gamma t^{n-2} + \gamma t^{n-3} u + \gamma t^{n-4} u^2 + \&c.$$

$$S = \delta t^{n-3} + \delta t^{n-4} u + \delta t^{n-5} u^2 + \&c.$$

$$T = \varepsilon t^{n-4} + \varepsilon t^{n-5} u + \varepsilon t^{n-6} u^2 + \&c.$$

&c.

Quia autem, ad Asymptotam inveniendam, Abscissam t infinitam statui oportet, in quovis membro omnes termini præ primo evanescent. Quare, si cujusvis terminus primus adsit, sequentes negligi possunt; sin primus desit, capiatur secundus; sin primus & secundus desint, a tertio erit incipiendum.

202. Quia u non dividit Functionem M , ejus primus ter-

minus deesse non potest: fiet ergo $\alpha t^{n-1} u + \zeta t^{n-1} = 0$, unde pro u oritur valor finitus, qui sit $= c$: hoc est recta Axi AX parallela ab eoque intervallo c distans erit Asymptota. Jam, ad Asymptotam curvilineam magis ad ipsam Curvam accedentem inveniendam, ponatur ubique, præterquam in primo termino, $u = c$, ac reperietur hæc æquatio

$$\alpha t^{n-1} u + \zeta t^{n-1} + t^{n-2} (\alpha c^2 + \zeta c + \gamma) + t^{n-3} (\alpha c^3 + \zeta c^2 + \gamma c + \delta) + \&c. = 0; \text{ vel, ob } \alpha u + \zeta = u - c, \text{ erit}$$

$$(u - c) t^{n-1} + t^{n-2} (\alpha c^2 + \zeta c + \gamma) + t^{n-3} (\alpha c^3 + \zeta c^2 + \gamma c + \delta) + \&c. = 0. \text{ Nisi jam terminus secundus desit, omnes sequentes negligi possunt, fietque } (u - c) + \frac{A}{t} = 0; \text{ si}$$

secundus desit, tertius sumatur, eritque $(u - c) + \frac{A}{t^2} = 0$.

Tertio vero etiam deficiente, fiet $(u - c) + \frac{A}{t^3} = 0$, & ita porro. Si omnes, præter ultimum constantem, deficient, erit

$$N \quad 3 \quad (u - c)$$

LIB. II. $(u - c) + \frac{A}{u - t} = 0$. Prorsus autem omnes si deessent,

tota æquatio divisibilis foret per $u - c$, ideoque ipsa recta $u - c = 0$, foret Curvæ portio.

203. Si ponatur $u - c = z$; seu, si Abscissæ in ipsa Asymptota recta capiantur, omnes Asymptotæ curvilinæ, quas unicus supremi membri Factor suppeditat, in hac æquatione generali comprehenduntur $z = \frac{C}{t^k}$, denotante k numerum

quemvis integrum exponente n minore. Quemadmodum ergo hæ Asymptotæ curvilinæ sint comparatæ, si Abscissa t ponatur infinita, videamus. Sit ergo XY Asymptota recta pro Axe sumta, & A initium Abscissarum, ducta recta CD orientur quatuor regiones, quas litteris P , Q , R & S designemus. Sit nunc primum $z = \frac{C}{t}$: &, quia sumto t negativo, fit z quoque negativa, Curva duos habebit ramos EX & FY in regionibus oppositis P & S ad rectam XY convergentes. Idem eveniet, si k fuerit numerus quicumque impar.

TAB. X.
Fig. 36.

At, si fuerit $k = 2$, seu $z = \frac{C}{t^2}$, quia, sive t statuatur affirmativa sive negativa, z perpetuo affirmativa manet, Curva constabit duobus ramis EX & FY in regionibus P & Q ad rectam XY convergentibus; quod idem contingit, si k fuerit numerus par quicumque, hoc tantum discrimine, quod convergentia eo fiat promptior, quo major sit exponens k .

204. Habeat supremum membrum P binos Factores $ay - bx$ inter se æquales; atque facta eadem, qua ante, ad alium \cdot Axem translatione, fiet

$$\begin{aligned}
 P &= && + \alpha t^{n-2} u^2 + \alpha t^{n-3} u^3 + \&c. \\
 Q &= \epsilon t^{n-1} + \epsilon t^{n-2} u + \epsilon t^{n-3} u^2 + \epsilon t^{n-4} u^3 + \&c. \\
 R &= \gamma t^{n-2} + \gamma t^{n-3} u + \gamma t^{n-4} u^2 + \gamma t^{n-5} u^3 + \&c. \\
 S &= \delta t^{n-3} + \delta t^{n-4} u + \delta t^{n-5} u^2 + \delta t^{n-6} u^3 + \&c. \\
 &&& \&c.
 \end{aligned}$$

Hinc, prout primus membri Q terminus affuerit, five minus, duæ oriuntur æquationes

$$\begin{aligned}
 & \text{I.} \\
 & \alpha t^{n-2} u^2 + \beta t^{n-1} = 0 \\
 & \text{feu} \\
 & \alpha u^2 + \beta t = 0 \\
 & \text{I I.} \\
 & \alpha t^{n-2} u^2 + \beta t^{n-2} u + \gamma t^{n-2} = \rho \\
 & \text{feu} \\
 & \alpha u^2 + \beta u + \gamma = 0.
 \end{aligned}$$

Quod si ergo prima æquatio $\alpha u^2 + \epsilon t = 0$, locum habet, TAB. X.
Fig. 38. Asymptota fit Parabola, cum cujus ambobus ramis duo Curvæ rami in infinito confundentur. Curva ergo in binis regionibus P & R ramos habebit cum Parabola EAF denique congruentes.

205. Sin autem altera æquatio $\alpha u u + \epsilon u + \gamma = 0$, refulset, tum videndum est an habeat duas radices reales an secus. Posteriori casu enim hac æquatione nulli profus rami in infinitum excurrentes denotantur. Sint ergo ambæ radices reales & inæquales, altera $u = c$, altera $u = d$, atque Curva duas habebit Asymptotas rectas inter se parallelas. Cujusnam vero utraque sit indolis, ut ante, investigabimus; scilicet, cum sit $\alpha u u + \epsilon u + \gamma = (u - c)(u - d)$, ponatur ubique $u = c$, præterquam in Factore $u - c$, ac prodibit $(c - d)t^{n-2}$
($u - c$)

LIB. II. $(u - c) + t^{n-3}(\alpha c^3 + \zeta c^2 + \gamma c + \delta) + t^{n-4}(\alpha c^4 + \zeta c^3 + \gamma c^2 + \delta c + \epsilon) + \&c. = 0$. Nisi ergo secundus terminus evanescat, sequentes omnes, posito $t = \infty$, evanescunt, eritque Aſymtota $(u - c) + \frac{A}{t} = 0$; si terminus secundus evanescat, fiet $(u - c) + \frac{A}{t^2} = 0$, atque ita porro. Si omnes termini, præter ultimum constantem, fuerint $= 0$, erit $(u - c) + \frac{A}{t^{n-2}} = 0$, quarum Curvarum figuras, si $t = \infty$, jam supra omnes descripsimus.

206. At, si ambæ radices æquationis $\alpha uu + \zeta u + \gamma = 0$, fuerint æquales, seu $\alpha uu + \zeta u + \gamma = (u - c)^2$, quia $u = c$, si hic valor in reliquis terminis substituatur, prodibit ista æquatio, $t^{n-2}(u - c)^2 + t^{n-3}(\alpha c^3 + \zeta c^2 + \gamma c + \delta) + t^{n-4}(\alpha c^4 + \zeta c^3 + \gamma c^2 + \delta c + \epsilon) + \&c. = 0$: unde, prout, excepto primo, vel non desit secundus, vel non desit tertius deficiente primo, vel non quartus deficientibus secundo & tertio, sequentes oriuntur æquationes pro Aſymtotis:

$$(u - c)^2 + \frac{A}{t} = 0;$$

$$(u - c)^2 + \frac{A}{t^2} = 0;$$

$$(u - c)^2 + \frac{A}{t^3} = 0;$$

usque ad

$$(u - c)^2 + \frac{A}{t^{n-2}} = 0;$$

Si omnes termini præter ultimum constantem desint. Verum si etiam ultimus evanesceret, foret $(u - c)^2 = 0$, ideoque Linea recta ipsa foret Curvæ portio, Curvæque adeo complexa.

207. Quanquam sic omnes casus, quos duo Factores æquales præbent,

præbeant, enumerati videntur, tamen ultima æquatio alias adhuc induere potest formas, unde diversæ Asymptotæ sequuntur. Evenit hoc, si Factor potestatis t^{n-3} per $u - c$ divisibilis deprehendatur: tum enim, uti in primo termino, relinquatur $u - c$ ac adjiciatur insuper terminus sequens qui proxime adest, hocque casu ejusmodi emergent æquationes

$$(u - c)^2 + \frac{A(u - c)}{t} + \frac{B}{t^2} = 0$$

$$(u - c)^2 + \frac{A(u - c)}{t} + \frac{B}{t^3} = 0$$

usque ad

$$(u - c)^2 + \frac{A(u - c)}{t} + \frac{B}{t^{n-2}} = 0.$$

Sin autem secundus terminus penitus desit, vel per $(u - c)^2$ divisibilis fuerit, tum spectetur terminus tertius, qui si per $u - c$ divisibilis deprehendatur, in eo $u - c$ relinquatur, atque præterea sequens proximus terminus adjungatur. Hocque casu ejusmodi orientur æquationes

$$(u - c)^2 + \frac{A(u - c)}{t^2} + \frac{B}{t^3} = 0$$

$$(u - c)^2 + \frac{A(u - c)}{t^2} + \frac{B}{t^4} = 0$$

usque ad

$$(u - c)^2 + \frac{A(u - c)}{t^2} + \frac{B}{t^{n-2}} = 0.$$

Quod si etiam tertius terminus desit, & quartus per $u - c$ divisibilis reperiatur, vel eti in hoc deficiente quintus, & ita porro, nascetur hujusmodi æquatio pro Curva Asymptota,

$$(u - c)^2 + \frac{A(u - c)}{t^p} + \frac{B}{t^q} = 0,$$

LIB. II. ubi exponens p semper minor erit quam q , & q minor quam $n - 1$.

208. Ponamus $n - c = z$, atque hæ æquationes omnes in hac forma $z z - \frac{A z}{t^p} + \frac{B}{t^q} = 0$, continentur. Ad quam evolvendam tres casus sunt spectandi, prout fuerit q major quam $2p$, vel q æqualis $2p$, vel q minor quam $2p$.

Casu primo, quo q superat $2p$; duæ æquationes in illa continentur, $z - \frac{A}{t^p} = 0$, & $Az - \frac{B}{t^{q-p}} = 0$: utraque enim, facto $t = \infty$, satisfacit. Nam, posito $z = \frac{A}{t^p}$, æquatio superior abit in $\frac{A^2}{t^{2p}} - \frac{AA}{t^{2p}} + \frac{B}{t^q}$, seu $A^2 - A^2 + \frac{B}{t^{q-2p}} = 0$, quod, ob q majorem quam $2p$, verum est, erit autem p minor quam $\frac{n-2}{2}$.

At, si $z = \frac{B}{A t^{q-p}}$, fiet $\frac{B B}{A^2 t^{2q-2p}} - \frac{B}{t^q} + \frac{B}{t^q}$, seu $\frac{B B}{A^2 t^{q-2p}} - B + B = 0$, quod verum est ob terminum primum evanescentem facto $t = \infty$. Hoc ergo casu super eadem Asymptota recta duæ habentur Asymptotæ curvilineæ, ideoque quatuor rami in infinitum excurrentes.

Secundus casus, quo $q = 2p$, præbet æquationem $z z - \frac{A z}{t^p} + \frac{B}{t^{2p}} = 0$, quæ, vel est imaginaria, si AA minor quam $4B$, quo casu nulla Asymptota extat, vel duas præbet Asymptotas similes $z = \frac{C}{t^p}$, si AA major quam $4B$.

In tertio casu, si q minor quam $2p$, æquationis medius terminus semper

semper evanescit, posito $t = \infty$; eritque ergo $zz + \frac{B}{t^q} = 0$, CAP. VIII.

æquatio pro una Asymptota. Formas quidem præcedentium Asymptotarum jam exposuimus, quare istas Asymptotas hac forma $zz = \frac{C}{t^k}$ contentas examinemus.

209. Si igitur Axis in ipsa Asymptota recta $n = c$ sumatur, & Applicata $n - c$ ponatur $= z$, omnes illæ Asymptotæ curvilinæ continebuntur in hac æquatione $zz = \frac{C}{t^k}$, deno-

tante k numerum integrum minorem quam $n - 1$. Harum autem Curvarum rami in infinitum excurrentes, seu factio $t = \infty$, ita se habebunt. Si $k = 1$, seu $zz = \frac{C}{t}$, quia t

TAB. X
Fig. 39.

negativum fieri nequit, Curva duos habebit ramos EX & FX in regionibus P & R in infinitum excurrentes, quod idem eveniet si fuerit k numerus quicumque impar. At, si sit k numerus par, ut 2, seu $zz = \frac{C}{t^2}$, primum dispiciendum est

utrum C sit quantitas negativa an affirmativa. Priori casu æ-
quatio realis esse nequit, ideoque Curva hinc nullum habebit
ramum in infinitum extensum. Posteriori casu Curva quatuor
habebit ramos in infinitum excurrentes & cum Asymptota XY
concurrentes, scilicet $EX, FX, GT,$ & HY in omnibus qua-
tuor regionibus $P, Q, R,$ & S dispersos.

TAB. XI
Fig. 40.

210. Ponamus supremum membrum æquationis P habere tres Factores æquales, atque æquatione ad Coordinatas t & n reducta, ut sit n iste Factor triplex ipsius P , erit.

$$P = \dots \dots \dots + at^{n-3}u^3 + at^{n-4}u^4 + \&c.$$

$$Q = Ct^{n-1} + Ct^{n-2}u + Ct^{n-3}u^2 + Ct^{n-4}u^3 + Ct^{n-5}u^4 + \&c.$$

$$R = \gamma t^{n-2} + \gamma t^{n-3}u + \gamma t^{n-4}u^2 + \gamma t^{n-5}u^3 + \gamma t^{n-6}u^4 + \&c.$$

$$S = \delta t^{n-3} + \delta t^{n-4}u + \delta t^{n-5}u^2 + \delta t^{n-6}u^3 + \delta t^{n-7}u^4 + \&c.$$

&c. O 2 Hinc,

LIB. II. Hinc, pro diversis constitutionibus membrorum Q & R , sequentes oriuntur æquationes.

I.

$$\alpha t^{n-3} u^3 + \zeta t^{n-1} = 0$$

II.

$$\alpha t^{n-3} u^3 + \zeta t^{n-2} u + \gamma t^{n-2} = 0$$

III.

$$\alpha t^{n-3} u^3 + \zeta t^{n-3} u^2 + \gamma t^{n-2} = 0$$

IV.

$$\alpha t^{n-3} u^3 + \zeta t^{n-3} u^2 + \gamma t^{n-3} u + \delta t^{n-3} = 0.$$

211. Prima æquatio abit in $\alpha u^3 + \zeta t^2 = 0$, ideoque hæc TAB. XI. Asymptota est Linea tertii ordinis, cujus talis erit figura, si Fig. 41. Abscissæ t super Axe XY a puncto A sumantur. Duos scilicet habebit ramos E & F in regionibus P & Q in infinitum excurrentes.

Secunda æquatio ita se habet $\alpha u^3 + \zeta t u + \gamma t = 0$. Ex qua u , posito $t = \infty$, duplicem valorem habere potest, vel finitum vel infinitum, ideoque in has duas æquationes resolvitur $\zeta u + \gamma = 0$ & $\alpha u u + \zeta t = 0$, posterior est pro Parabola, uti ante vidimus, ac propterea Curva habebit duos ramos in infinitum extensos ad Parabolam appropinquantem. Prior vero æquatio præbeat $u - c = 0$, quæ est pro Linea recta Asymptota, cujus indoles perspicietur si, præterquam in $\zeta u + \gamma = u - c$, ubique loco u scribatur c ; eritque ergo, $t^{n-2} (u - c) + t^{n-3} (ac^3 + \zeta c^2 + \gamma c + \delta) + t^{n-4} (\alpha c^4 + \zeta c^3 + \gamma c^2 + \delta c + \epsilon) + \&c. = 0$; unde, uti supra, sequitur fore vel $(u - c) + \frac{A}{t} = 0$, vel $(u - c) + \frac{A}{t^2} = 0$, &c. Ultima vero æquatio, quæ oriri potest, est $(u - c) + \frac{A}{t^{n-2}} = 0$. Hoc ergo casu Curva duplicem habebit Asym-

totam,

totam, alteram rectam indolis hic declaratae, alteram vero Parabola conjunctim.

C A P.
VIII.

212. Tertia æquatio $\alpha u^3 + \epsilon u^2 + \gamma t = 0$, posito $t = \infty$, subsistere nequit, nisi sit $u = \infty$; ideoque terminus ϵu^2 præ αu^3 evanescit, proditque ista æquatio tertii ordinis $\alpha u + \gamma t = 0$, pro Asymptota, cujus hæc est figura, ut in regionibus oppositis P & S duos habeat ramos AE & AF in infinitum excurrentes.

TAB. XI.
Fig. 42.

Quarta æquatio autem $\alpha u^3 + \epsilon u^2 + \gamma u + \delta = 0$, vel unam vel tres Asymptotas rectas inter se parallelas exhibet, nisi duæ vel omnes inter se sint æquales, ad quarum indolem indagandam sit primum $u = c$, radix æquationis una aliam sui similem non habens, sitque $\alpha u^3 + \epsilon u^2 + \gamma u + \delta = (u - c) \times (f u^2 + g u + h)$. Ponatur ubique $u = c$, præterquam in hoc Factore $u - c$, ac prodibit hujusmodi æquatio $t^{n-3}(u - c) + A t^{n-4} + B t^{n-5} + C t^{n-6} + \&c. = 0$; unde Asymptota orietur formæ $u - c = \frac{K}{t}$, existente k numero minore quam $n - 2$.

213. Si æquationis $\alpha u^3 + \epsilon u^2 + \gamma u + \delta = 0$, duæ radices fuerint æquales, ita ut ea expressio sit $= (u - c)^2 \times (f u + g)$; atque, statuendo $u = c$, nisi in quopiam membro fuerit Factor $u - c$, ad hujusmodi æquationem pervenietur $(u - c)^2 + \frac{A(u - c)}{t^p} + \frac{B}{t^q} = 0$; ubi erit q minor quam $n - 2$, & p minor quam q , quem casum ante evolvimus. Superest ergo casus, quo æquatio $\alpha u^3 + \epsilon u^2 + \gamma u + \delta = 0$, tres habet radices reales, puta $(u - c)^3$, atque hujusmodi obrinebitur æquatio $(u - c)^3 t^{n-3} + P t^{n-4} + Q t^{n-5} + R t^{n-6} + S t^{n-7} + \&c. = 0$. Quod si P non fuerit divisibile per $u - c$, ponatur $u = c$, fietque

$$0 \quad 3$$

$$(u - c)^3,$$

LIB. II. $(u - c)^3 + \frac{A}{t} = 0$. Sin autem P divisorem habeat $u - c$ semel, ponatur ubique, præterquam in hoc Factore, $u = c$, atque orietur æquatio hujus formæ $(u - c)^3 + \frac{A(u - c)}{t} + \frac{B}{t^q} = 0$, existente q numero minore quam $n - 2$; est vero $\frac{B}{t^q}$ terminus secundum proxime sequens, qui non evanescit facto $u - c$. Sin P adeo per $(u - c)^2$ fuerit divisibilis, Q vero non habeat Factorem $u - c$, orietur æquatio hujus formæ $(u - c)^3 + \frac{A(u - c)^2}{t} + \frac{B}{t^2} = 0$. Quod si autem secundus adeo per $(u - c)^3$ fuerit divisibilis, tur ordine procedendum est, donec ad terminum perveniat non divisibilem per $(u - c)^3$, qui si fuerit divisibilis per $(u - c)$, ulterius est progrediendum, donec ad terminum non divisibilem per $u - c$, perveniat. Sin autem ille terminus per $(u - c)^2$ divisibilis fuerit, procedatur ulterius donec perveniat ad terminum vel non divisibilem per $u - c$ vel divisibilem. Priori casu æquatio terminetur, posteriori ulterius pergatur donec ad terminum non divisibilem per $(u - c)$ perveniat. Sic itaque obtinebitur semper æquatio in hac forma generali contenta $(u - c)^3 + \frac{A(u - c)^2}{t^p} + \frac{B(u - c)}{t^q} + \frac{C}{t^r} = 0$, ubi erit r minor quam $n - 2$; q minor quam r , & p minor quam q .

214. In hac æquatione vel tres continentur æquationes formæ $(u - c) = \frac{K}{t^k}$; vel una hujusmodi & una $(u - c)^2 = \frac{K}{t^k}$; vel unica tantum formæ $(u - c)^3 = \frac{K}{t^k}$: quod potest evenit si fuerit & $3p$ major quam r & $3q$ major quam $2r$.

27. Tum vero etiam fieri potest ut duæ æquationes fiant imaginariæ, quæ ergo nullam Asymtotam indicabunt. Ceterum formas harum Asymtotarum jam explicavimus præter ultimam æquatione $(u - c)^2 = \frac{K}{t^k}$ contentam. Præbet au-

tem ista æquatio, si k sit numerus impar, formam Figurâ trigessimâ sextâ designatam, cum duobus ramis EX & FY in regionibus oppositis P & S in infinitum excurrentibus. Sin

TAB. X.
Fig. 36.

autem k sit numerus par, orietur forma Figura trigesima septima repræsentata in qua sunt duo rami EX & FY ad eandem Asymtotæ rectæ XY partem, seu in regionibus P & Q excurrentes.

TAB. X
Fig. 37.

215. Quoniam ex his facile perspicitur, quemadmodum Asymtotarum forma, si quatuor pluresve Factores simplices in membro æquationis supremo fuerint æquales, investigari debeat, ulterius hic non progredior; verum hoc Caput applicatione regularum datarum ad unum exemplum finiam.

E X E M P L U M.

Sit igitur proposita Linea curva hac æquatione expressa $y^3xx \times (y - x) - xy(y + xx) + 1 = 0$, cujus supremum membrum $y^3xx(y - x)$ unum Factorem habet solitarium, $y - x$, duos æquales xx , & insuper tres æquales y^3 .

Consideremus primum Factorem simplicem $y - x$; ex quo, posito $y = x$, fiet $y - x - \frac{2}{x} = 0$; &, ob $x = \infty$, erit

TAB. XI.
Fig. 43.

$y - x = 0$, quæ est æquatio pro Asymtota rectilinea BAC cum Axe XY in initio Abscissarum faciens angulum semirectum BAY . Ad hanc Lineam transferatur tanquam ad Axem

æquatio, quod fiet ponendo $y = \frac{u+t}{\sqrt{2}}$ & $x = \frac{t-u}{\sqrt{2}}$; quo

facto orietur hæc æquatio $\frac{(u+t)(tt-uu)^2u}{4} + \frac{(tt-uu)(tt+uu)}{2} +$

$1 = 0$: unde, per 4 multiplicando, fiet

0 =

$$\begin{array}{r} \text{LIB. II.} \quad 0 = t^5 u + t^4 u u - 2t^3 u^3 - 2t t u^4 + t u^5 + u^6 \\ \quad \quad \quad - 2t^4 \quad \quad \quad + 2u^4 \\ \quad \quad \quad + 4 \end{array}$$

ex hac æquatione, factò $t = \infty$, invenitur $u = 0$; ideoque reliqui termini, præter hos duos $t^5 u - 2t^4$, evanescunt; unde pro Asymtota curvilinea erit $u = \frac{2}{t}$. Ob hunc ergo Factorem Curva quæsitâ duos habebit ramos bB , cC in infinitum excurrentes.

216. Sumantur nunc Factores æquales gemini x^2 ; eritque, ob $x x = \frac{x y (y y + x x) - 1}{y^3 (y - x)}$. Axe ergo sumto recta AD ad priorem XY normali, fiet $y = t$ & $x = u$, pro quo ista æquatio resultat

$$\begin{array}{r} 0 = t^4 u^2 - t^3 u^3 \\ \quad - t^3 u - t u^3 \\ \quad + 1 \end{array}$$

quæ, factò t infinito, abit in $t^4 u^2 - t^3 u + 1 = 0$, unde duæ nascuntur æquationes $u = \frac{1}{t}$ & $u = \frac{1}{t^3}$. Quare hic Factor quatuor præbet ramos in infinitum excurrentes; primo nempe duos dD , eE ex æquatione $u = \frac{1}{t}$; & duos ad eandem partes sitos dD & eE ex æquatione $u = \frac{1}{t^3}$.

217. Tres Factores æquales y^3 referuntur ad ipsum Axem XY , fietque $t = x$ & $y = u$, unde nascitur æquatio hæc,
 $0 = -t^3 u^3 + t t u^4 - t^3 u - t u^3 + 1$:
 quæ, positò t infinito, dat $t^3 u^3 + t^3 u = 0$, seu $u(uu + 1) = 0$; unde, ob $uu + 1 = 0$ æquationem impossibilem, unica obtinetur Asymtota recta $u = 0$, conveniens cum ipso Axe XY , cujus indoles exprimeretur hac æquatione $t^3 u = 1$ seu $u = \frac{1}{t^3}$; ac propterea iste Factor triplex duos tantum præbet ramos yY & xX in infinitum excurrentes. Omnino ergo
 Curva

Curva quæ sita octo ramos in infinitum extensos habebit, qui quomodo in spatio finito inter se conjungantur hujus non est CAP. VIII. loci explicare.

218. Ex hoc ergo & præcedente Capite ramorum in infinitum extensorum varietas luculenter perspicitur. Primum enim hi rami Curvarum vel ad Lineam quampiam rectam tanquam Asymptotam convergunt, uti fit in Hyperbola, vel Asymptotam rectam non habent, uti Parabola. Priori casu rami Curvarum vocantur *hyperbolici*, posteriori *parabolici*. Utriusque classis innumerabiles dantur species; ramorum enim hyperbolicorum species his exprimentur æquationibus, inter Coordinatas t & u , quarum illa t statuitur infinita.

$$u = \frac{A}{t}; u = \frac{A}{t^2}; u = \frac{A}{t^3}; u = \frac{A}{t^4}, \&c.$$

$$u^2 = \frac{A}{t}; u^2 = \frac{A}{t^2}; u^2 = \frac{A}{t^3}; u^2 = \frac{A}{t^4}, \&c.$$

$$u^3 = \frac{A}{t}; u^3 = \frac{A}{t^2}; u^3 = \frac{A}{t^3}; u^3 = \frac{A}{t^4}, \&c.$$

&c.

Ramorum vero parabolicorum species indicantur sequentibus æquationibus.

$$u^2 = At; u^3 = At; u^4 = At; u^5 = At, \&c.$$

$$u^3 = At^2; u^4 = At^2; u^5 = At^2; u^6 = At^2, \&c.$$

$$u^4 = At^3; u^5 = At^3; u^6 = At^3; u^7 = At^3, \&c.$$

&c.

Quælibet autem æquatio harum expositarum, ad minimum, duos exhibet ramos in infinitum excurrentes, si exponentium ipsarum t & u non uterque fuerit numerus par; sin autem uterque exponens fuerit numerus par, tum vel nullum ramum infinitum præbet, vel quatuor: illud scilicet evenit, si æquatio fit impossibilis, hoc vero si sit realis.

De Linearum tertii ordinis subdivisione in species.

219. **N**atura atque numerus ramorum in infinitum extensorum merito essentielle discrimen in Lineis curvis constituere censetur, atque ex hoc fonte commodissime desumitur ratio subdivisionis Linearum cujusque ordinis in suas species diversas. Hinc enim quoque oritur eadem Linearum secundi ordinis divisio in suas species, quam ipsa rei natura supra suppeditaverat.

Sit enim propofita æquatio generalis pro Lineis secundi ordinis

$$ayy + \zeta yx + \gamma xx + \delta y + \epsilon x + \zeta = 0,$$

cujus supremum membrum $ayy + \zeta yx + \gamma xx$, potissimum spectetur, utrum habeat Factores simplices reales an secus. Quod si enim careat Factoribus, nascitur prima species, *Ellipsis* dicta, sin autem Factores sint reales, videndum est utrum sint inæquales, an æquales; illo casu oritur *Hyperbola*, hoc vero *Parabola*.

220. Casu ergo, quo membri supremi Factores sunt reales & inæquales, Curva duas habebit Asymptotas rectas; ad quarum naturam investigandam sic $ayy + \zeta yx + \gamma xx = (ay - bx)(cy - dx)$, ita ut sit

$$(ay - bx)(cy - dx) + \delta y + \epsilon x + \zeta = 0.$$

Consideretur primum Factor $ay - bx$, qui in infinito dat $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$, fiet itaque

$$ay - bx + \frac{\delta b + \epsilon a}{bc - ad} + \frac{\zeta}{cy - dx} = 0,$$

unde

unde æquatio $ay - bx + \frac{\delta b + \epsilon a}{bc - ad} = 0$, definit positionem unius Asymptotæ rectæ; similique modo æquatio hæc CAP. IX.
 $cy - dx + \frac{\delta d + \epsilon c}{ad - bc} = 0$, ostendet Asymptotam alteram.

221. Ad naturam cujusque Asymptotæ scrutandam, æquationem ad alium Axem transferamus ponendo $y = \frac{au + bt}{\sqrt{aa + bb}}$
 & $x = \frac{at - bu}{\sqrt{aa + bb}}$, fitque $\sqrt{aa + bb} = g$, erit $u((ac + bd)u + (bc - ad)t) + \frac{(\delta u - \epsilon b)u + (\delta b + \epsilon a)t}{g} + \zeta = 0$,
 ideoque

$$g(bc - ad)tu + g(ac + bd)uu + (\delta b + \epsilon a)t + (\delta a - \epsilon b)u + \zeta g = 0.$$

Hinc, posito in reliquis membris $u = -\frac{\delta b - \epsilon a}{g(bc - ad)}$,
 erit $(g(bc - ad)u + \delta b + \epsilon a)t + \frac{(ac + bd)(\delta b + \epsilon a)^2}{g(bc - ad)^2} - \frac{(\delta a - \epsilon b)(\delta b + \epsilon a)}{g(bc - ad)} + \zeta g = 0$, seu $g(bc - ad)u + \delta b + \epsilon a + \frac{g(\delta b + \epsilon c)(\delta b + \epsilon a)}{(bc - ad)^2 t} + \frac{\zeta g}{t} = 0$: erit ergo Asymptota hyperbolica generis $u = \frac{A}{t}$. Simili vero modo Asymptota altera ex Factore $cy - dx$ oriunda definitur, unde Curva habebit duo ramorum in infinitum extensorum paria, utrumque æquatione $u = \frac{A}{t}$ expressum.

222. Sint jam ambo Factores æquales, seu $ayy + \epsilon xy + yxx = (ay - bx)^2$; atque, facta eadem ad alium Axem translatione, qua fit $y = \frac{ay + bt}{g}$, & $x = \frac{at - bu}{g}$, erit $gguu + \frac{(\delta a - \epsilon b)u}{g} + \frac{(\delta b + \epsilon a)t}{g} + \zeta = 0$; & facta t infinito, erit $uu + \frac{(\delta b + \epsilon a)t}{g^2} = 0$, quæ æquatio ostendit

LIB. II. duos ramos parabolicos speciei $uu = At$, quippe Curva ipsa erit Parabola, ipsaque sua Asymtota. Sin autem esset $db + \epsilon a = 0$, tum æquatio foret $gzuu + \frac{dzu}{a} + \zeta = 0$, pro duabus rectis inter se parallelis, qui est casus, quo æquatio secundi ordinis tota in duos Factores simplices est resolubilis. Sic igitur species Linearum secundi ordinis invenissemus, etiam si nondum erutæ fuissent.

223. Eodem igitur modo aggrediamur Lineas tertii ordinis, quarum æquatio generalis est

$$\alpha y^3 + \beta y^2x + \gamma yxx + \delta x^3 + \epsilon yy + \zeta yx + \eta xx + \theta y + i x + k = 0.$$

Supremum igitur membrum $\alpha y^3 + \beta y^2x + \gamma yx^2 + \delta x^3$, quia est imparium dimensionum, vel unum habet Factorem simplicem realem, vel omnes tres Factores simplices erunt reales. Sequentes igitur casus sunt evolvendi.

I.

Si unicus extet Factor simplex realis.

II.

Si omnes tres sint reales, & inter se inæquales.

III.

Si duo Factores fuerint æquales.

IV.

Si omnes tres Factores fuerint æquales.

Quoniam vero in quovis casu ad unicum Factorem calculum accommodasse sufficit; sit iste Factor, sive solus adsit sive cum aliis sui æqualibus inæqualibusve, $ay - bx$; atque ad hunc positio Axis ita immutetur, ut hætenus fecimus; quo facto, oriatur hæc æquatio, qua vice superioris utamur cum æque late pateat

$\alpha tu + \beta tu + \gamma u^3 + \delta t + \epsilon tu + \zeta uu + \eta^2 + \theta u + i = 0$,
ubi membrum supremum $\alpha tu + \beta tu + \gamma u^3$, unum certe habet Factorem u .

CASUS I.

CASUS I.

224. Habeat ergo membrum supremum unicum Factorem realem u , quod evenit si $\zeta\zeta$ sit minor quam $4\alpha\gamma$: atque, posito t infinito, erit $au + d = 0$, quæ est æquatio pro Asymptota recta. Præbeat hæc æquatio valorem $u = c$; eritque,

$$at(u - c) + t(\zeta c + \varepsilon c + \eta) + \gamma c^3 + \zeta c c + \theta c + i = 0,$$

quæ est æquatio pro natura Asymptotæ. Hinc, prout $\zeta c c + \varepsilon c + \eta$ vel non fuerit $= 0$, vel sit $= 0$, duplex Asymptotæ indoles prodit; nempe vel $u - c = \frac{A}{t}$, vel $u - c = \frac{A}{t^2}$; unde duæ primæ Linearum tertii ordinis species formantur, quæ ita se habebunt.

1.

PRIMA Species unicum habet Asymptotam rectam speciei $u = \frac{A}{t}$.

2.

SECUNDA Species unicum habet Asymptotam rectam speciei $u = \frac{A}{t^2}$.

CASUS 2.

225. Sint membri supremi tres Factores simplices reales & inter se inæquales; quod evenit si in æquatione

$$atu + \zeta tu + \gamma u^3 + dt + etu + \zeta ui + \eta t + \theta u + i = 0,$$

fuerit $\zeta\zeta$ major quam $4\alpha\gamma$. Hoc igitur casu de unoquoque Factore eadem sunt tenenda; quæ modo de unico Factore sunt exposita. Unusquisque scilicet suppeditat binos ramos hyperbolicos vel speciei $u = \frac{A}{t}$, vel speciei $u = \frac{A}{t^2}$, unde

primum fit $u = \frac{\alpha\epsilon + \zeta\gamma}{\alpha d - \zeta\gamma} = c$, qui valor si loco u in CAP. IX.
 secundo membro continente t substituitur, ostendet ex hoc
 Factore u seu $\alpha y - \zeta x$ Asymtotam oriri formæ $u = \frac{A}{t}$
 nisi fuerit

$$\frac{\alpha\eta + \zeta\theta}{\zeta} + \frac{(\alpha\epsilon + \zeta\zeta)(\gamma\epsilon + d\zeta)}{(\alpha d - \zeta\gamma)^2} = 0.$$

Simili modo Factor $\gamma y - d x$ Asymtotam præbebit formæ
 $u = \frac{A}{t}$ nisi fuerit

$$\frac{\gamma\eta + d\theta}{d} + \frac{(\alpha\epsilon + \zeta\zeta)(\gamma\epsilon + d\zeta)}{(\alpha d - \zeta\gamma)^2} = 0.$$

227. Hinc patet fieri utique posse ut neque η neque utraque formula modo inventa evanescat, ex quo species tertia utique erit possibilis. Quod ad speciem quartam attinet, ponatur $\eta = 0$, quo una Asymtota formæ $u = \frac{A}{tt}$ prodeat; tum autem ambæ reliquæ expressiones in unam coalescunt, ideoque binæ reliquæ Asymtotæ erunt formæ $u = \frac{A}{t}$, nisi fuerit $\theta + \frac{(\alpha\epsilon + \zeta\zeta)(\gamma\epsilon + d\zeta)}{(\alpha d - \zeta\gamma)^2} = 0$; unde & species quarta est possibilis. At, si præter $\eta = 0$, una ex binis reliquis expressionibus reduatur $= 0$, simul altera evanescit; quam ob rem fieri non potest, ut duæ Asymtotæ fiant formæ $u = \frac{A}{tt}$, quin simul tertia eandem formam induat; ex quo species quinta est impossibilis. Sexta autem ob hoc ipsum erit possibilis, quia oritur, si $\eta = 0$, & $\theta = \frac{-(\alpha\epsilon + \zeta\zeta)(\gamma\epsilon + d\zeta)}{(\alpha d - \zeta\gamma)^2}$. Hi ergo duo casus quinque tantum præbuerunt species Linearum tertii ordinis, quod ea, quam quintam posuimus, prætermitti debet, &

5.

QUINTA Species tres habet Asymtotas speciei $u = \frac{A}{tt}$.

CASUS

CASUS 3.

228. Habeat membrum supremum duos Factores u æquales; quod evenit, si in æquatione calis præcedentis primus terminus $\alpha t t u$ evanescat. Æquatio ergo generalis ad hunc casum pertinens erit hujusmodi,

$$\alpha t u u - \zeta u^3 + \gamma t t + \delta t u + \epsilon u u + \zeta t + \eta u + \theta = 0,$$

habet ergo membrum supremum duos Factores u æquales, ac tertium $\alpha u - \zeta u$ reliquis inæqualem. Iste tertius Factor

producet Asymptotam vel formæ $u = \frac{A}{t}$, vel formæ $u =$

$\frac{A}{t t}$, prout fuerit hæc expressio

$$(\alpha \delta + 2 \zeta \gamma)(\alpha^2 \epsilon + \alpha \zeta \delta + \zeta \zeta \gamma) - \alpha^3 (\alpha \eta + \zeta \zeta)$$

vel non $= 0$, vel $= 0$.

229. Quod ad duos Factores æquales attinet, primum casus occurrit, si γ non fuerit $= 0$; tum enim, facto $t = \infty$, fiet $\alpha u u + \gamma t = 0$, quæ est æquatio pro Asymptota parabolica speciei $u u = A t$. Hinc istæ duæ nascentur species novæ Linearum tertii ordinis, nempe.

6.

SEXTA Species habet unam Asymptotam speciei $u = \frac{A}{t}$ & unam Asymptotam speciei $u u = A t$.

7.

SEPTIMA Species habet unam Asymptotam speciei $u = \frac{A}{t t}$ & unam parabolicam speciei $u u = A t$.

230. Sit jam $\gamma = 0$; atque Factor tertius $\alpha t - \zeta u$ dabit Asymptotam formæ $u = \frac{A}{t t}$, si fuerit

$$\delta (\alpha \epsilon + \zeta \delta) = \alpha (\alpha \eta + \zeta \zeta)$$

sin autem hæc æqualitas non habeat locum, Asymptota erit formæ $u = \frac{A}{t}$. Habebimus ergo hanc æquationem

+ $\alpha t u u$

$$\begin{array}{r} + \alpha t u u \quad - \zeta u^3 \\ + \delta t u \quad + \epsilon u u = 0 \\ + \zeta t \quad + \eta u \\ + \theta \end{array}$$

Hic, factò $t = \infty$, fiet $\alpha u u + \delta u + \zeta = 0$.

Sit primum $\delta \delta$ minor quam $4 \alpha \zeta$, atque hinc nulla orietur Asymptota; quare ex hoc casu duæ oriuntur Species.

8.

OCTAVA Species habet unicam Asymptotam speciei

$$u = \frac{A}{t}.$$

9.

NONA Species habet unicam Asymptotam speciei

$$u = \frac{A}{u}.$$

231. Sint æquationis $\alpha u u + \delta u + \zeta = 0$, ambæ radices reales & inæquales, nempe $\delta \delta$ major quam $4 \alpha \zeta$; atque hinc duæ prodibunt Asymptotæ rectæ inter se parallelæ, utraque formæ $u = \frac{A}{b}$, qui casus denuo duas suppeditat Species.

10.

DECIMA Species habet unam Asymptotam speciei $u = \frac{A}{b}$ & duas inter se parallelas speciei $u = \frac{A}{t}$.

11.

UNDECIMA Species habet unam Asymptotam speciei $u = \frac{A}{b}$ & duas inter se parallelas speciei $u = \frac{A}{t}$.

232. Sint æquationis $\alpha u u + \delta u + \zeta = 0$, ambæ radices inter se æquales, seu $\delta \delta = 4 \alpha \zeta$, seu $\alpha u u + \delta u + \zeta = \alpha (u - c)^2$, fietque $\alpha t (u - c)^2 = \zeta c^3 - \epsilon c c - \eta c - \theta$, unde oritur Asymptota recta una speciei $u u = \frac{A}{t}$. Hinc ergo duæ nascuntur Species novæ.

12.

DUODECIMA Species habet unam Asymptotam speciei

Euleri *Introduc. in Anal. infin. Tom. II.*

Q $u =$

LIB. II. $u = \frac{A}{t}$ & unam speciei $uu = \frac{A}{t}$.

13.

DECIMATERTIA Species habet unam Asymtotam speciei $u = \frac{A}{tt}$ & unam speciei $uu = \frac{A}{t}$.

CASUS IV.

233. Quid si membri supremi omnes tres Factores fuerint æquales, æquatio habebit hujusmodi formam,

$$au^3 + \zeta tt + \gamma tu + \delta uu + \epsilon t + \zeta u + \eta = 0,$$

Hic primum spectandus est terminus ζtt , qui si non desit, Curva habebit Asymtotam parabolicam speciei $u^3 = At$, sicque una oritur Species.

14.

DECIMAQUARTA Species habet unicam Asymtotam parabolicam speciei $u^3 = At$.

234. Desit jam terminus ζtt , eritque

$$au^3 + \gamma tu + \delta uu + \epsilon t + \zeta u + \eta = 0;$$

unde, posito t infinito, fiet $au^3 + \gamma tu + \epsilon t = 0$, nisi sint γ & $\epsilon = 0$. Non igitur sit $\gamma = 0$, atque in hac æquatione duæ continentur æquationes $auu + \gamma t = 0$, & $\gamma u + \epsilon = 0$; prior est pro Asymtota parabolica speciei $uu = At$; posterior vero, si ponatur $\frac{\epsilon}{\gamma} = c$, dabit æquationem hanc

$$\gamma t(u - c) + ac^3 + \delta cc + \zeta c + \eta = 0,$$

eritque ergo pro Asymtota hyperbolica speciei $u = \frac{A}{t}$, unde.

15.

DECIMAQUINTA Species unam habet Asymtotam parabolicam speciei $uu = At$, & unam rectam speciei $u = \frac{A}{t}$.

$\frac{A}{b}$, atque Axis parabolæ parallelus est alteri Asymptotæ rectæ. CAP. IX.

235. Sit etiam $\gamma = 0$, ut sit hæc æquatio

$$\alpha u^3 + \delta uu + \epsilon t + \zeta u + \eta = 0,$$

ubi ϵ evanescere non potest, nisi simul Linea cesset esse Curva. Facto autem t infinito, necessario u debet esse infinita, unde fit $\alpha u^3 + \epsilon t = 0$, quæ præbet speciem ultimam.

16.

DECIMASEXTA Species unam habet Asymptotam parabolicam speciei $u^3 = At$.

236. Omnes ergo Lineas tertii ordinis reduximus ad *sedecim Species*, in quibus propterea omnes illæ *Species septuaginta dua*, in quas NEWTONUS Lineas tertii ordinis divisit, continentur. Quod vero inter hanc nostram divisionem ac *Newtonianam* tantum intercedat discrimen mirum non est; hic enim tantum ex ramorum in infinitum excurrentium indole Specierum diversitatem desumimus, cum NEWTONUS quoque ad statum Curvarum in spatio finito spectasset, atque ex hujus varietate diversas Species constituisset. Quanquam autem hæc divisionis ratio arbitraria videtur, tamen NEWTONUS suam tandem rationem sequens multo plures Species producere potuisset, cum equidem mea methodo utens neque plures neque pauciores Species eruere queam.

237. Quo igitur natura & complexus cujusque Speciei melius perspiciatur, æquationem generalem pro qualibet Specie exhibebo, idque in simplicissima forma, quæ salva universitate locum habere potest. Pro unaquaque vero simul Species *Newtonianas* eo pertinentes recensebo.

SPECIES PRIMA.

$$y(xx - 2mxy + nny) + ayy + bx + cy + d = 0,$$

existente mm majore quam nn & nisi si erit $b = 0$.

Huc pertinent NEWTONI species, 33, 34, 35, 36, 37, 38?

SPECIES SECUNDA.

$$y(xx - 2mxy + nny) + ayy + cy + d = 0;$$

existente mm minore quam nn .

Huc pertinent NEWTONI species, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45.

SPECIES TERTIA.

$$y(x - my)(x - ny) + ayy + bx + cy + d = 0,$$

ubi nec $b = 0$, nec $mb + c + \frac{aa}{(m - n)^2} = 0$, nec $nb + c + \frac{aa}{(m - n)^2} = 0$, neque $m = n$.

Huc pertinent NEWTONI Species, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9;
item 24, 25, 26, 27, si $a = 0$.

SPECIES QUARTA.

$$y(x - my)(x - ny) + ayy + cy + d = 0;$$

ubi nec $c + \frac{aa}{(m - n)^2} = 0$, nec $m = n$.

Huc pertinent NEWTONI Species 10, 11, 12, 13, 14, 15,
16, 17, 18, 19, 20, 21; item, si $a = 0$, hæc 28, 29, 30, 31.

SPECIES QUINTA.

$$y(x - my)(x - ny) + ayy - \frac{aay}{(m - n)^2} + d = 0,$$

non existente $m = n$.

Huc pertinent NEWTONI Species, 22, 23, & 32.

SPECIES SEXTA.

$$yy(x - my) + axx + bx + cy + d = 0;$$

si neque $a = 0$, neque $2m^3aa - mb - c = 0$.

Huc pertinent NEWTONI Species, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52.

SPECIES SEPTIMA.

CAP.
IX.

$$yy(x - my) + axx + bx + m(2m^2a^2 - b)y + d = 0;$$

non existente $a = c$.

Huc pertinent NEWTONI Species, 53, 54, 55, 56.

SPECIES OCTAVA.

$$yy(x - my) + bbx + cy + d = 0;$$

non existente $c = -mbb$ nec $b = 0$.

Huc pertinent NEWTONI Species, 61, & 62.

SPECIES NONA.

$$yy(x - my) + bbx - mbb y + d = 0;$$

non existente $b = 0$.

Huc pertinet NEWTONI Species, 63.

SPECIES DECIMA.

$$yy(x - my) - bbx + cy + d = 0;$$

non existente $c = mbb$, nec $b = 0$.

Huc pertinent NEWTONI Species, 57, 58, 59.

SPECIES UNDECIMA.

$$yy(x - my) - bbx + mbb y + d = 0;$$

non existente $b = 0$.

Huc pertinet NEWTONI Species, 60.

SPECIES DUODECIMA.

$$yy(x - my) + cy + d = 0;$$

non existente $c = 0$.

Huc pertinet NEWTONI Species, 64.

SPECIES TERTIA-DECIMA.

$$yy(x - my) + d = 0.$$

Huc pertinet NEWTONI Species, 65.

SPECIES QUARTA-DECIMA.

$$y^3 + axx + bxy + cy + d = 0 : \\ \text{non existente } a = 0.$$

Huc pertinent NEWTONI Species, 67, 68, 69, 70, 71.

SPECIES QUINTA-DECIMA.

$$y^3 + bxy + cx + d = 0 ; \\ \text{non existente } b = 0.$$

Huc pertinet NEWTONI Species, 66.

SPECIES SEXTA-DECIMA.

$$y^3 + ay + bx = 0 ; \\ \text{non existente } b = 0.$$

Huc pertinet NEWTONI Species, 72.

238. Species autem hæ plerumque tam late patent, ut sub unaquaque varietates satis notabiles contineantur; si quidem ad formam, quam Curvæ habent in spatio finito, respiciamus. Hancque ob causam NEWTONUS numerum Specierum multiplicavit, ut eas Curvas, quæ in spatio finito notabiliter discrepant, a se invicem secerneret. Expediet ergo has, quas *Species* nominavimus, *Genera* appellare, atque varietates, quæ sub unoquoque deprehenduntur, ad *Species* referre. Imprimis autem hoc erit tenendum, si quis Lineas quarti altiorisve ordinis simili modo subdividere voluerit; ibi enim multo major varietas in quavis Specie sic inventa locum habebit.

C A P U T X.

De præcipuis Linearum tertii ordinis proprietatibus.

239. **Q**uemadmodum supra Linearum secundi ordinis proprietates præcipuas ex æquatione generali deduximus, ita etiam Linearum tertii ordinis præcipuæ proprietates ex æquatione generali cognosci poterunt: similique modo licebit Linearum quarti altiorisve gradus proprietates ex æquatione concludere. Quam ob rem consideremus æquationem generalissimam pro Lineis tertii ordinis, quæ est

$$ay^3 + \zeta y^2x + \gamma yxx + \delta x^3 + \epsilon yy + \zeta yx + \eta xx + \theta y + \iota x + \kappa = 0,$$

quæ exprimet naturam Lineæ tertii ordinis cujuscvis inter Coordinatas x & y ad quemvis angulum inclinatas, & recta quacunque pro Axe assumpta.

240. Nisi igitur α sit $= 0$, unicuique Abscissæ x vel una respondebit Applicata realis, vel tres. Ponamus dari tres Applicatas reales; atque manifestum est earum relationem per æquationem definiri posse. Posita itaque $\alpha = 1$, istiusmodi erit æquatio,

$$y^3 + (\zeta x + \epsilon)yy + (\gamma xx + \zeta x + \theta)y + \delta x^3 + \eta xx + \iota x + \kappa = 0:$$

atque summa istarum trium Applicatarum eidem Abscissæ x respondentium, erit $= -\zeta x - \epsilon$; summa trium rectangulorum ex binis Applicatis formatorum erit $= \gamma xx + \zeta x + \theta$; ac denique productum omnium seu parallelepipedum ex illis formatum erit $= -\delta x^3 - \eta xx - \iota x - \kappa = 0$. Si duæ Applicatæ essent imaginariæ, hæc quidem eadem valerent, at ad Linearum figuram accommodari non possent, quia ex ea neque

LIB. II. neque summa neque rectangulum duarum Applicatarum imaginariarum intelligi potest.

TAB.

XII.
Fig. 44.

241. Sit igitur Linea quæcunque tertii ordinis ad Axem AZ relata, ad quem sub dato angulo applicatæ sint Ordinatæ LMN , lmn Curvam secantes in tribus punctis. Posita ergo Abscissâ $AP = x$, Applicata y triplicem habebit valorem PL , PM , & $-PN$: unde erit $PL + PM - PN = -6x - \epsilon$.

Quare, si capiatur $PO = z = \frac{PL + PM - PN}{3}$, punctum O ita erit in medio situm, ut sit $LO = MO + NO$. Cum igitur sit $z = -\frac{6x - \epsilon}{3}$, hoc punctum O situm erit in

Linea recta OZ , quæ recta propterea omnes Ordinatas lmn ipsi LMN parallelas ita secabit in o , ut sit $lo + mo = no$; quæ proprietas analogâ est proprietati Diametrorum, qua Lineæ secundi ordinis sunt præditæ. Quod si ergo duæ Ordinatæ parallelæ & Curvam in tribus punctis secantes ita secentur in punctis O & o , ut binæ Applicatæ ad unam partem jacentes simul sumtæ æquales sint tertiæ ad partem alteram sitæ, recta per hæc puncta O & o ducta omnes reliquas Ordinatas illis parallelas similiter secabit, eritque quasi Diameter Lineæ tertii ordinis.

242. Quoniam in Lineis secundi ordinis omnes Diametri se mutuo in eodem puncto interfecant, videamus quomodo plures hujusmodi Diametri Linearum tertii ordinis inter se sint comparatæ. Concipiamus ergo ad eundem Axem AP sub alio quovis angulo Applicatas; sitque Abscissâ $= t$ & Applicata $= u$; erit $y = nu$ & $x = t - mu$, qui valores in æquatione generali

$$y^3 + 6y^2x + 7yxx + dx^3 + eyy + 2yx + 7xx + by + cx + n = 0,$$

substituti hanc dabunt æquationem

$$+ n^3 u^3$$

$$\left. \begin{aligned} &+ n^3 a^3 + \zeta n^2 u^2 t + \gamma n u t t + d t^3 + \varepsilon n^2 u^2 + \zeta n u t + \eta t t + \theta n u + u + x \\ &- \zeta m n^2 u^3 - 2 \gamma m n u^2 t - 3 d m u t t - \zeta m n u u - 2 \eta m u t - \varepsilon m u \\ &+ \gamma m^2 m u^3 + 3 d m^2 u^2 t + \eta m^2 u u \end{aligned} \right\} = 0$$

Hinc pro Linea illa recta Diametri vicem sustinente, si ejus Applicata sub eodem angulo ad Abscissam t ducta vocetur $=v$,

$$\text{erit } 3v = \frac{-\zeta n^2 t + 2 \gamma n u t - 3 d m^2 t - \varepsilon m + \zeta m - \eta m m}{n^3 - \zeta m n^2 + \gamma m^2 u - d m^3}$$

243. Sit jam O intersectio harum duarum Diametrorum, unde ad Axem AZ primo prioribus Applicatis parallela ducatur OP , tum vero posterioribus parallela OQ , eritque $AP = x$, $PO = z$, $AQ = t$ & $OQ = v$. Tum vero erit $z = n v$ & $x = t - m v$, ideoque $v = \frac{z}{n}$, & $t =$

T A B.
X II.
Fig. 45.

$x + \frac{m}{n} z$. Primo itaque habetur $3z = -\beta x - \varepsilon$, porroque $3v = \frac{-\beta x}{n} - \frac{\varepsilon}{n}$ & $t = x - \frac{\beta m x}{3 n} - \frac{\varepsilon m}{3 n}$. Substituantur hi valores in æquatione ante inventa, & prodibit

$$\left. \begin{aligned} &-\beta n n x + \beta \beta m n x - \beta \gamma m m x + \frac{\beta d m^3 x}{n} \\ &-\varepsilon n n + \beta \varepsilon m n - \gamma \varepsilon m m + \frac{d \varepsilon m^3}{n} \\ &+ \beta n n x - \frac{\beta \beta m n x}{3} - \frac{\beta \varepsilon m u}{3} + \varepsilon n n \\ &- 2 \gamma m n x + \frac{2 \beta \gamma m m x}{3} + \frac{2 \gamma \varepsilon m m}{3} - \zeta m m \\ &+ 3 d m m x - \frac{\beta d m^3 x}{n} - \frac{d \varepsilon m^3}{n} + \eta m m \end{aligned} \right\} = 0$$

feu

$$\left. \begin{aligned} &\frac{2}{3} \beta \beta m n x - \frac{1}{3} \beta \gamma m m x - 2 \gamma m n x + 3 d m m x \\ &+ \frac{2}{3} \beta \varepsilon m n - \frac{1}{3} \gamma \varepsilon m m - \zeta m n + \eta m m \end{aligned} \right\} = 0$$

LIB. II.

244. Pendet ergo utique intersecctio Diametrorum O ab inclinatione Applicatarum ad Axem, quæ litteris m & n continetur; neque idcirco, (si intersecctionem Diametrorum *Centrum*, vocare lubeat,) Lineæ tertii ordinis omnes Centro gaudent. Interim tamen casus exhiberi possunt, quibus Diametrorum intersecctio mutua in idem punctum fixum incidat. Fict scilicet hoc, si termini per mn & mm affecti seorsim nihilo æquales ponantur, ac valores ipsius x inde orituri æquales statuatur. Fiet autem ex his duabus æqualitatibus $x =$

$$\frac{3\zeta - 2\beta\epsilon}{2\beta\beta - 6\gamma} = \frac{3\eta - \gamma\epsilon}{\beta\gamma - 9d}; \text{ qui duo valores ut congruant, necesse est ut sit}$$

$$6\beta\beta\eta - 2\beta\beta\gamma\epsilon - 18\gamma\eta + 6\gamma\gamma\epsilon = 3\beta\gamma\zeta - 2\beta\beta\gamma\epsilon - 27d\zeta + 18\beta d\epsilon, \\ \text{seu}$$

$$\beta\gamma\zeta - 2\beta\beta\eta - 9d\zeta + 6\gamma\eta + 6\beta d\epsilon - 2\gamma\gamma\epsilon = 0,$$

$$\text{unde fit } \eta = \frac{\beta\gamma\zeta - 9d\zeta + 6\beta d\epsilon - 2\gamma\gamma\epsilon}{2\beta\beta - 6\gamma}. \text{ Quoties}$$

ergo η hujusmodi habuerit valorem, toties omnes Diametri se mutuo in uno eodemque puncto intersecant; ideoque hæ Lineæ tertii ordinis Centro gaudebunt, quod reperietur sumendo in Axe.

$$AP = \frac{3\zeta - 2\beta\epsilon}{2\beta\beta - 6\gamma}, \&$$

$$PO = \frac{-3\beta\zeta + 6\gamma\epsilon}{2\beta\beta - 6\gamma}.$$

245. Hæc eadem Centri determinatio, si quod datur, locum habet si pro primo coëfficiente a non ponatur unitas. Si enim propofita fuerit æquatio generalissima pro Lineis tertii ordinis

$$ax^3 + by^3 + cx^2 + dx^3 + e\gamma\gamma + \zeta xy + \eta xx + \theta y + ix + x = 0,$$

hæ Curvæ Centro erunt præditæ, si fuerit

$$\eta = \frac{\beta\gamma\zeta - 9ad\zeta + 6\beta d\epsilon - 2\gamma\gamma\epsilon}{2\beta\beta - 6a\gamma}. \text{ Tum vero Centrum}$$

erit

erit in O , existente $AP = \frac{3\alpha\zeta - 2\zeta\epsilon}{2\zeta\zeta - 6\alpha\gamma}$ & $PO = \frac{6\gamma\epsilon - 3\zeta\zeta}{2\zeta\zeta - 6\alpha\gamma}$. CAP. X

Quare, si unica Ordinata Curvam in tribus punctis secans ita dividatur, ut binæ Applicatæ ad unam partem sitæ æquentur tertiæ ad alteram partem jacenti, tum recta per Centrum & hoc divisionis punctum ducta, omnes alias Ordinatas illi parallelas similiter secabit.

246. Si hæc ad æquationes Specierum supra enumeratarum accommodentur, patebit Species primam, secundam, tertiam, quartam & quintam Centro gaudere, si modo sit $a = 0$; hocque casu Centrum in ipso Abscissarum initio esse positum. Species sexta & septima Centro prorsus carent, quia cœfficiens a abesse nequit. Species vero octava, nona, decima, undecima, duodecima & decima-tertia Centrum habent, semper in Abscissarum initio positum. In Speciebus decima-quarta, decima-quinta & decima-sexta Centrum infinite distat, ideoque omnes illæ Lineæ Triametri inter se erunt parallelæ.

247. His de summa trium cujusque Applicatæ valorum notatis, contemplemur eorundem productum, quoniam de reſtangularum aggregato nihil admodum notatu dignum reperitur. Erit ergo ex æquatione generali §.239. — $PM.PL.PN = -\delta x^3 - \eta xx - \iota x - \kappa$: ad quam expressionem explicandam ad hoc attendamus, quod si ponatur $y = 0$, fiat $\delta x^3 + \eta xx + \iota x + \kappa = 0$, cujus propterea æquationis radices dabunt Axis AZ & Curvæ intersecſiones. Quæ si sint in punctis $B, C,$ & D erit $\delta x^3 + \eta xx + \iota x + \kappa = \delta(x - AB)(x - AC)(x - AD)$; quapropter erit $PL.PM.PN = \delta.PB.PC.PD$; ideoque, sumpta alia quacun- que Ordinata lmn priori parallela, erit $PL.PM.PN : PB.PC.PD = pl.pm.pn : pB.pC.pD$; quæ proprietas omnino similis est illi, quam supra pro Lineis secundi ordinis fatione reſtangularum invenimus; atque similis proprietas in Lineas quarti, quinti, & superiorum ordinum competet.

248. Habeat nunc Linea tertii ordinis tres quoque Asym- totas rectas $FBf, GDg, HC h$. Quoniam ipsa Linea tertii

TAB. XII. Fig. 46.

LIB. II. ordinis in has tres Asymptotas abit, si æquatio pro Curva resolubilis fiat in tres Factores simplices formæ $py + qx + r$; pro Asymptotis, tanquam Linea complexa, peculiaris æquatio exhiberi poterit, cujus supremum membrum conveniet cum supremo membro pro Curva. Deinde vero, quia Asymptotarum positio ex secundo æquationis membro determinatur, æquatio pro Asymptotis & æquatio pro Curva secundum quaque membrum commune habebunt. Quare, si pro Curva ad Axem AP relata hæc fuerit æquatio inter Abscissam $AP = x$, & Applicatam $PM = y$,

$$y^3 + (\zeta x + \epsilon)y^2 + (\gamma xx + \zeta x + \theta)y + \delta x^3 + \eta xx + \iota x + \kappa = 0.$$

Pro Asymptotis ad eundem Axem AP relatis sequens habebitur æquatio inter Abscissam $AP = x$ & Applicatam $PG = z$

$$z^3 + (\zeta x + \epsilon)z^2 + (\gamma xx + \zeta x + B)z + \delta x^3 + \eta x^2 + Cx + D = 0,$$

in qua coëfficiens ζ, B, C, D ita sunt comparati, ut æquatio in tres Factores simplices resolubilis evadat.

249. Quod si ergo ducatur Applicata quæcunque PN , cum Curvam secans in tribus punctis L, M, N , tum etiam Asymptotas in tribus punctis F, G, H secans, erit ex æquatione pro Curva $PL + PM + PN = -\zeta x - \epsilon$. At ex æquatione pro Asymptotis erit pari modo $PF + PG + PH = -\zeta x - \epsilon$. Hanc ob rem erit $PL + PM + PN = PF + PG + PH$, seu $FL - GM + HN = 0$. Atque, si alia quæcunque Applicata pf ducatur, erit eodem modo $fn - gm + hl = 0$. Si igitur recta quæcunque cum Curvam tum tres Asymptotas secet in tribus punctis, binæ partes Lineæ inter Asymptotas & Curvam contentæ quæ ad eandem regionem vergunt, æquales erunt parti in regionem oppositam vergenti.

250. In Linea igitur tertii ordinis, quæ tres habet Asymptotas rectas, tria crura ad has Asymptotas convergentia non omnia ad eandem Asymptotarum partes possunt esse disposita :
sed,

sed, si duo ad eandem partem vergant, tertium necessario ad oppositas tendet. Hanc ob rem hujusmodi Linea tertii ordinis, qualem figura representat, est impossibilis, quoniam recta secans Asymptotas in punctis f, g, b , Curvam vero in l, m, n , præbet partes fn, gm, bl in eandem plagam vergentes, quarum summa nihilo æqualis esse nequit. Partes enim in eandem plagam vergentes obtinent idem signum, puta +; quæ vero in contrariam plagam tendunt signum —: unde patet summam trium harum partium evanescere non posse nisi signis diversis sint præditæ.

CAP. X.

TAB.
XIII.
Fig. 47.

251. Hinc jam clare perspicitur ratio cur in Linea tertii ordinis dari nequeant duæ Asymptotæ rectæ speciei $u = \frac{A}{t}$, dum tertia Asymptota sit speciei $u = \frac{A}{t}$, propterea quod illa crura hyperbolica infinites magis ad suam Asymptotam convergant, quam crura hyperbolicum speciei $u = \frac{A}{t}$. Ponamus enim rectam fl in infinitum removeri, sientque intervalla fn, gm, bl infinite parva. At, si rami duo nx, my ponantur speciei $u = \frac{A}{t}$, tertius vero ramus lz speciei $u = \frac{A}{t}$, tum intervalla fn & gm infinites erunt minora quam intervallum bl , ideoque esse nequit $gm = fn + bl$.

TAB.
XII.
Fig. 46.

252. In Lineis ergo superiorum ordinum, quæ tot habent Asymptotas quot dimensiones, unica Asymptota speciei $u = \frac{A}{t}$ adesse nequit, dum reliquæ sint specierum superiorum $u = \frac{A}{t^2}, u = \frac{A}{t^3}$ &c.; sed, si una adsit speciei $u = \frac{A}{t}$, necessario & altera adesse debet. Ob eandem rationem, si Asymptota speciei $u = \frac{A}{t}$ nulla adsit, fieri non potest ut una tantum speciei $u = \frac{A}{t^2}$ adsit, sed ad minimum duæ ad-

LIB. II. esse debebunt. Crura enim hyperbolica speciei $u = \frac{A}{t^2}$,

$u = \frac{A}{t^2}$ &c., infinites magis ad suas Asymptotas convergunt,

quam species $u = \frac{A}{t^2}$. Hinc igitur in enumeratione Specierum, quæ in ordine quopiam superiori continentur, casus impossibiles facile excludi, hocque insignes calculi molestiæ evitari poterunt.

253. Ponamus autem Lineam tertii ordinis a recta quapiam in duobus tantum punctis secari; atque ab omnibus aliis rectis huic parallelis vel in duobus etiam punctis vel nusquam secabitur. Si igitur in Axe quocunque statuatur Applicatæ y huic rectæ parallelæ, æquatio ita erit comparata

$$yy + \frac{(\gamma xx + \zeta x + \theta)y}{\zeta x + \epsilon} + \frac{\delta x^3 + \eta xx + \iota x + \kappa}{\zeta x + \epsilon} = 0.$$

Scilicet, si Abscissa AP dicatur $= x$, duæ habebuntur Applicatæ y , nempe PM & $-PN$; erit autem, ex natura æquationum, $PM - PN = \frac{-\gamma xx - \zeta x - \theta}{\zeta x + \epsilon}$. Bifecetur

Ordinata MN in puncto O , erit $PO = \frac{\gamma xx + \zeta x + \theta}{\zeta x + \epsilon}$; hinc, si ponatur $PO = z$, erit $z(\zeta x + \epsilon) = \gamma xx + \zeta x + \theta$: unde patet omnia puncta O Ordinatas parallelas MN bifecantia sita esse in Hyperbola, nisi fuerit $\gamma xx + \zeta x + \theta$ divisibile per $\zeta x + \epsilon$, quo casu punctum O positum erit in Linea recta.

254. Quod si ergo $\gamma xx + \zeta x + \theta$ divisibile fuerit per $\zeta x + \epsilon$, tum Curva prædita erit Diametro, seu recta omnes Ordinatas parallelas MN bifecante; quæ proprietas in omnes Lineas secundi ordinis competit. Verum, si $\gamma xx + \zeta x + \theta$ divisibile sit per $\zeta x + \epsilon$, evanescere debet si ponatur $x = \frac{-\epsilon}{\zeta}$; quare, si fuerit $\gamma\epsilon\epsilon - \zeta\epsilon^2 + \zeta\theta = 0$, tum Linea tertii ordinis Diametro erit prædita.

255. Hinc

255. Hinc igitur generalissime omnes casus determinare poterimus, quibus Lineæ tertii ordinis Diametris sunt præditæ. CAP. X.
 Sit enim propofita æquatio generalis

$ay^3 + \text{E}y^2x + \gamma yxx + \delta x^3 + \epsilon yy + \zeta yx + \eta xx + \theta y + \iota x + \kappa = 0,$
 cujus Applicatæ y , quia triplicem valorem vel unicum habent, Diametri proprietatem recipere nequeunt. Ducantur ergo sub alio quocunque angulo ad eundem Axem aliæ Applicatæ u , ita ut sit $y = nu$, & $x = t - mu$, ac fiat substitutio

$$\left. \begin{aligned} &+ an^3u^3 + \text{E}n^2u^2t + \gamma nmt + \delta t^3 + \epsilon n^2u^2 + \zeta nt + \eta t + \theta m + \iota t + \kappa \\ &- \text{E}m^2u^3 - 2\gamma mu^2t - 3\delta mutt - \zeta mu^2 - 2\eta mt - \theta mu \\ &+ \gamma m^2nu^3 + 3\delta m^2u^2t + \eta m^2u^2 \end{aligned} \right\} = 0$$

Primum ergo, quo hæ novæ Applicatæ ad Diametrum recipiendam aptæ reddantur, necesse est ut duplicem tantum valorem induere possint, critque idcirco

$$an^3 - \text{E}m^2 + \gamma m^2n - \delta m^3 = 0.$$

256. Præterea vero requiritur ut quantitas, per quam u est multiplicata, nempe $(\gamma n - 3\delta m)t + (\zeta n - 2\eta m)t + \theta n - \iota m$, divisibilis sit per eam, quæ u multiplicat, quæ est $(\text{E}m - 2\gamma mn + 3\delta mm)t + \epsilon m - \zeta m + \eta mm$; sive illa nihilo fieri debet æqualis, si ponatur $t = \frac{-\epsilon m + \zeta m - \eta mm}{\text{E}m - 2\gamma mn + 3\delta mm}$.

Hinc ergo fiet

$$y = \frac{\theta n}{m} \frac{(\zeta n - 2\eta m)(\epsilon n n - \zeta m n + \eta m m)}{(\text{E}n n - 2\gamma m u + 3\delta m m)m} + \frac{(\gamma n - 3\delta m)(\epsilon n n - \zeta m n + \eta m m)^2}{(\text{E}n n - 2\gamma m n + 3\delta m m)^2 m}$$

257. Si hæc ad Species supra enumeratas applicemus, apparebit in Specie prima nullam prorsus Diametrum locum habere posse. In Specie autem secunda Ordinatæ Axi, in quo Abscissæ

LIB. II. ciffæ x capiuntur parallele Diametro, bifecabuntur. Species tertia nullam prorsus Diametrum admittit. Species quarta semper unam habet Diametrum Ordinatæ uni Asymptotæ parallelas bifecantem. Quinta vero Species tres habebit Diametros, quæ Ordinatæ singulis Asymptotis parallelas bifecabunt. Species sexta nullam prorsus habere potest Diametrum. Septima unam Diametrum semper habet pro Ordinatæ Asymptotæ ex Factore $x - my$ ortæ parallelis. Octava unam Diametrum habet pro Ordinatæ Axi parallelis. Nona Species duas habet Diametros; alteram pro Ordinatæ Axi parallelis, alteram pro Ordinatæ alteri Asymptotæ parallelis. Decima uti octava, & undecima uti nona est comparata. Duodecima ratione Diametrorum par est octavæ, & decima-tertia nonæ. Decima-quarta unam habet Diametrum pro Ordinatæ Axi parallelis. Species decima-quinta & sexta omnino Ordinatæ, quæ in duobus punctis Curvam fecent, non admittunt; ideoque Diametro gaudere nequeunt. Hæ autem Diametrorum proprietates a NEWTONO probe sunt notatæ, quam ob causam earum commemorationem hic data opera attulisse juvabit.

258. Quanquam in æquationibus, quas supra pro singulis Speciebus Linearum tertii ordinis dedimus, Coordinatæ x & y inter se normales posuimus, tamen Speciei natura non mutatur, etiam si eæ quomodocunque ad se invicem sint inclinatæ. Quot enim æquatio, positis Coordinatæ orthogonalibus, præbet crura in infinitum extensa, totidem quoque præbebit eadem æquatio, si Applicatæ ad Axem utcunque inclinentur. Neque vero etiam natura crurum in infinitum excurrentium mutatur, mutata Coordinatarum inclinatione; quæ enim crura sunt parabolica, eadem manebunt parabolica, & quæ sunt hyperbolica eandem naturam retinebunt. Quin etiam Species crurum tam parabolicorum quam hyperbolicorum non alterabitur. Quare omnis Curva, quam æquatio pro prima Specie exhibita præbet, siue Coordinatæ statuatur rectangulæ siue obliquangulæ, semper ad eandem Speciem primam erit referenda,

referenda, similique modo reliquarum Specierum omnium ratio est comparata. CAP. X.

259. Admissa ergo Coordinatarum obliquitate quacunque, æquationes supra datæ non refringentur, si loco y ponatur vu , & $t - \mu u$ loco x , existente $\mu\mu + vv = 1$. Sumto autem angulo obliquitatis pro lubitu, æquationes supra datæ simpliciores reddi poterunt. Hinc pro singulis Speciebus sequentes simplicissimæ æquationes inter Coordinatas obliquangulas t & u formabuntur.

SPECIES PRIMA.

$$u(tt + nnu) + auu + bt + cu + d = 0,$$

existente nec $n = 0$ nec $b = 0$

SPECIES SECUNDA.

$$u(tt + nnu) + auu + cu + d = 0,$$

non existente $n = 0$.

SPECIES TERTIA.

$$u(tt - nnu) + auu + bt + cu + d = 0,$$

existente nec $n = 0$, nec $b = 0$, nec $\frac{+nb}{4m} + c + \frac{aa}{4m} = 0$.

SPECIES QUARTA.

$$u(tt - nnu) + auu + cu + d = 0,$$

existente nec $n = 0$, nec $c + \frac{aa}{4m} = 0$.

SPECIES QUINTA.

$$u(tt - nnu) + auu - \frac{aan}{4m} + d = 0,$$

non existente $n = 0$.

LIB. II.

SPECIES SEXTA.

$$t u u + a t t + b t + c u + d = 0,$$

existente nec $a = 0$, nec $c = 0$.

SPECIES SEPTIMA.

$$t u u + a t t + b t + d = 0,$$

non existente $a = 0$.

SPECIES OCTAVA.

$$t u u + b b t + c u + d = 0,$$

existente nec $b = 0$, nec $c = 0$.

SPECIES NONA.

$$t u u + b b t + d = 0,$$

non existente $b = 0$.

SPECIES DECIMA.

$$t u u - b b t + c u + d = 0,$$

existente nec $b = 0$, nec $c = 0$.

SPECIES UNDECIMA.

$$t u u - b b t + d = 0,$$

non existente $b = 0$.

SPECIES DUODECIMA.

$$t u u + c u + d = 0,$$

non existente $c = 0$.

SPECIES DECIMA-TERTIA.

$$t u u + d = 0.$$

SPECIES DECIMA-QUARTA.

$$u^3 + att + cu + d = 0.$$

SPECIES DECIMA-QUINTA.

$$u^3 + atu + bt + d = 0,$$

non existente $a = 0$.

SPECIES DECIMA-SEXTA.

$$u^3 + at = 0.$$

CAPUT XI.

De Lineis quarti Ordinis.

260. **Æ** Quatio generalis pro Lineis quarti Ordinis est

$$\alpha y^4 + \beta y^3 x + \gamma y^2 x^2 + \delta y x^3 + \epsilon x^4 + \zeta y^3 + \eta y^2 x + \rho y x x + \sigma x^3 + \kappa y y + \lambda y x + \mu x x + \nu y + \xi x + o = 0;$$

quæ autem, (variatis tum Coordinatarum inclinatione, tum Axis positione, tum Abscissarum initio,) multis modis pro diversis casibus ad simpliciorum formam reduci potest. Quo igitur, secundum methodum traditam, omnes *Species* vel potius *Genera* Linearum, quæ in hoc ordine continentur enumerentur, ad membrum supremum respici oportet, unde sequentes casus nascuntur diversi.

I.

Si supremi membri omnes quatuor Factores simplices sunt imaginarii.

II.

Si duo Factores tantum sunt reales & inæquales inter se.

S 2

III. Si

III.

LIB. II. Si duo Factores tantum sunt reales & æquales.

IV.

Si omnes quatuor Factores sunt reales & inæquales.

V.

Si duo Factores inter se sunt æquales, reliquis binis inter se existentibus inæqualibus.

VI.

Si præter duos Factores æquales etiam reliqui duo sint inter se æquales.

VII.

Si tres Factores simplices fuerint inter se æquales.

VIII.

Si omnes quatuor Factores inter se æquales fuerint.

C A S U S I.

261. Si omnes Factores membri supremi fuerint imaginarii, Curva ramis in infinitum excurrentibus omnino erit destituta; quoniam igitur ex diversitate ramorum infinitorum discrimen Generum petinus, iste casus unicum præbebit Genus. Erit ergo

G E N U S I.

Curvarum ramis in infinitum extensis omnino carentium, quarum natura hac æquatione simplicissima exprimetur

$$(yy + mmxx)(yy - 2pxy + qqxx) + ay^2x + byx^2 + cyy + dyx + exx + fy + gx + b = 0.$$

Existente pp minore quam qq . Quoniam enim in supremo membro termini y^4 & x^4 necessario adfunt, Coordinatis x & y quantitate data sive augendis sive minuendis, effici potest, ut termini y^3 & x^3 ex secundo membro excedant.

C A S U S

CASUS II.

262. Si duo Factores membri supremi tantum sint reales & CAP. XI.
 inæquales, per obliquitatem Coordinatarum & Axis mutatio-
 nem effici potest ut alter sit y alter vero x , æquatio ergo ita
 se habebit

$$yx(\gamma y - 2myx + nnxx) + ay^2x + byx^2 + cyy + dyx +$$

$$exx + fy + gx + h = 0$$

existente mm minore quam nn .

Quia enim in supremo membro termini y^3x & yx^3 necessario
 adlunt, in secundo membro termini y^3 & x^3 omitti possunt.
 Habebit ergo Curva duas Asymptotas rectas, alteram æquatio-
 ne $y = 0$, alteram æquatione $x = 0$, expressam. Prioris
 ergo indoles exponetur hac æquatione $nnyx^3 + exx + gx +$
 $h = 0$; posterioris hac $xy^3 + cyy + fy + h = 0$. Hinc for-
 mabitur

GENUS II.

Duabus Asymptotis rectis, utraque indolis $u = \frac{A}{t}$, prædi-
 tum, si neque c neque e sit quantitas evanescens.

GENUS III.

Duas habet Asymptotas rectas, alteram indolis $u = \frac{A}{t}$,
 alteram indolis $u = \frac{A}{t^2}$, & exprimitur æquatione
 $yx(\gamma y - 2myx + nnxx) + ay^2x + byxx + cyy + dyx + fy + gx + h = 0$,
 existente neque $e = 0$, neque $g = 0$.

GENUS IV.

Duas habet Asymptotas rectas, alteram indolis $u = \frac{A}{t}$,
 alteram $u = \frac{A}{t^3}$, & continetur hac æquatione

L. 19. II. $yx(yy - 2myx + nmx) + ay^2x + byxx + cyy + dyx + fy + h = 0$,
non existente $e = 0$.

G E N U S V.

Duas habet Asymptotas rectas, ambas generis $u = \frac{A}{t^2}$, &
continetur æquatione

$$yx(yy - 2myx + nmx) + ayyx + byxx + dyx + fy + gx + h = 0,$$

existente neque $f = 0$, neque $g = 0$.

G E N U S V I.

Duas habet Asymptotas rectas, alteram indolis $u = \frac{A}{t^2}$,
& alteram indolis $u = \frac{A}{t^3}$, continetur autem hac æquatione

$$yx(yy - 2myx + nmx) + ayyx + byxx + dyx + fy + h = 0,$$

non existente $f = 0$.

G E N U S V I I.

Duas habet Asymptotas rectas, ambas indolis $u = \frac{A}{t^3}$, &
continetur hac æquatione

$$yx(yy - 2myx + nmx) + ayyx + byxx + dyx + h = 0,$$

existente ubique nn majore quam mm .

C A S U S I I I.

263. Sint ambo illi Factores supremi membri, qui soli sunt
reales, inter se æquales, atque æquatio erit hujusmodi,

$$yy(yy - 2myx + nmx) + ayxx + bx^3 + cyy + dyx + exx +$$

$$fy + gx + h = 0,$$

existente iterum nn majore quam mm , quæ æquatio, nisi sit
 $b = 0$, dat

GENUS VIII.

Habens unam Asymptotam parabolicam speciei $uu = At$.

Si autem $b = 0$, posito $x = \infty$, fiet $yy + \frac{ay}{nn} + \frac{e}{nn} + \frac{g}{mx} + \frac{b}{nnxx} = 0$. Hinc, si fuerit aa minor quam $4nne$, prodit

GENUS IX.

Nullum habens ramum in infinitum extensum.

Si fuerit $b = 0$, & aa major quam $4nne$, neque sit $g = 0$, prodit

GENUS X.

Duas habens Asymptotas inter se parallelas speciei $u = \frac{A}{t}$.

Si fuerit & $b = 0$, & $g = 0$, & aa major quam $4nne$ prodit

GENUS XI.

Duas habens Asymptotas inter se parallelas speciei $u = \frac{A}{tt}$.

Si fuerit $b = 0$, & $aa = 4nne$, nec vero $g = 0$, prodit

GENUS XII.

Asymptotam habens hyperbolicam speciei $uu = \frac{A}{t}$.

Si fuerit $b = 0$, $g = 0$, & $aa = 4nne$, atque b quantitas negativa, prodit

GENUS XIII.

Asymptotam habens hyperbolicam speciei $uu = \frac{A}{tt}$.

At, si $b = 0$, $g = 0$, $aa = 4nne$, & b quantitas affirmativa, prodit

Nullos profus habens ramos in infinitum extensos.

C A S U S I V.

264. Sint membri supremi omnes quatuor Factores simplices reales & inæquales, atque æquatio hujusmodi formam habebit

$$yx(y - mx)(y - nx) + ay^2x + byxx + cyy + dyx + exx + fy + gx + h = 0.$$

Curva igitur quatuor habebit Asymptotas rectas speciei vel $u = \frac{A}{t}$, vel $u = \frac{A}{t^2}$, vel $u = \frac{A}{t^3}$. Hinc, ad præceptum §. 251. datum, sequentia orientur Genera.

G E N U S X V.

Habens quatuor Asymptotas hyperbolicas omnes speciei $u = \frac{A}{t}$.

G E N U S X V I.

Habens quatuor Asymptotas hyperbolicas, tres speciei $u = \frac{A}{t}$, & unam speciei $u = \frac{A}{t^2}$.

G E N U S X V I I.

Habens quatuor Asymptotas hyperbolicas, tres speciei $u = \frac{A}{t}$, & unam speciei $u = \frac{A}{t^3}$.

G E N U S X V I I I.

Habens quatuor Asymptotas hyperbolicas, duas speciei $u = \frac{A}{t}$, & duas speciei $u = \frac{A}{t^2}$.

GENUS XIX.

CAP.
XI.

Habens quatuor Asymptotas hyperbolicas, duas speciei $u = \frac{A}{t}$, unam speciei $u = \frac{A}{t^2}$, & unam speciei $u = \frac{A}{t^3}$.

GENUS XX.

Habens quatuor Asymptotas hyperbolicas, duas speciei $u = \frac{A}{t}$, & duas speciei $u = \frac{A}{t^2}$.

GENUS XXI.

Habens quatuor Asymptotas hyperbolicas, omnes speciei $u = \frac{A}{t^2}$.

GENUS XXII.

Habens quatuor Asymptotas hyperbolicas, tres speciei $u = \frac{A}{t^2}$, & unam speciei $u = \frac{A}{t^3}$.

GENUS XXIII.

Habens quatuor Asymptotas hyperbolicas, duas speciei $u = \frac{A}{t^2}$, & duas speciei $u = \frac{A}{t^3}$.

GENUS XXIV.

Habens quatuor Asymptotas hyperbolicas, omnes speciei $u = \frac{A}{t^3}$.

CASUS V.

265. Sint duo Factores membri supremi inter se æquales, reliquis existentibus inæqualibus, æquatio erit hujusmodi

Euleri *Introduct. in Anal. infin. Tom. II.* T yyx

L I B. II. $yyx(y+nx) + ayxx + bx^3 + cyy + dyx + exx + fy + gx + h = 0.$

Hinc primo, ratione Factorum æqualium, omnia oriuntur Genera, quæ in *casu III.* & unumquodque cum tot varietatibus occurrit, quot Factores inæquales suggerunt, hoc est quot casus secundus continet Genera. Omnino ergo sexies septem hoc est quadraginta duo Genera ex hoc casu nascuntur. Duo autem hinc prodeunt Genera impossibilia, nempe si ambæ Asymptotæ parallelæ fuerint speciei $u = \frac{A}{t}$, & reliquarum una $u = \frac{A}{t}$, altera existente vel $u = \frac{A}{t}$, vel $u = \frac{A}{t^3}$. Quare, hic casus quadraginta Genera præbet, quæ cum antecedentibus numerum Generum *sexaginta-quatuor* conficiunt, quæ singula hic describere nimis foret longum. Neque etiam, quia singula hæc Genera evolvere non vacavit, firmiter affirmare licet, omnia esse realia. Qui autem secundum præcepta data hoc negotium in se suscipere voluerit, numerum Generum, si opus fuerit, restringet atque emendabit.

C A S U S V I.

266. Hic casus, quo duo Factorum æqualium paria adfunt, ista æquatione continebitur

$$yyxx + ay^3 + bx^3 + cyy + dyx + exx + fy + gx + h = 0.$$

Utrumque autem Factorum æqualium par in se spectatum varietates dat septem, unde ambo paria præbebunt Genera quadraginta novem. Quia vero h simul affirmativum & negativum esse nequit, duo Genera sunt impossibilia, ideoque ex hoc casu omnino nascuntur Genera quadraginta septem, qui numerus etiam major est quam ut singula hic recenseri queant. Hactenus ergo nati sumus Genera *centum & undecim*.

CASUS VII.

267. Si tres Factores inter se fuerint æquales, æquatio erit ejusmodi

$$y^3x + ayxx + bx^3 + cyy + dyx + exx + fy + gx + b = 0.$$

Hic Factor x præbet Asymtotam speciei $u = \frac{A}{t}$, si non fuerit $c = 0$; at, si $c = 0$, nec vero $f = 0$, Asymtotam dat speciei $u = \frac{A}{tt}$; at, si $c = 0$, & $f = 0$, Asymtotam

dat speciei $u = \frac{A}{t^3}$. Deinde Factor y^3 , nisi fuerit $b = 0$, dat Asymtotam parabolicam speciei $u^3 = Att$; sin autem $b = 0$, posito x infinito, fit $y^3 + ayx + dy + ex + g + \frac{cy + fy + b}{x} = 0$. Hic, si non sit $e = 0$, erit $y^3 + ayx +$

$ex = 0$; unde, si nec $a = 0$, erit & $y^2 + ax = 0$ & $ay + e = 0$: simul ergo locum habet Asymtota parabolica speciei $uu = At$, & hyperbolica hac æquatione expressa $(ay + e)x - \frac{e^3}{a^3} - \frac{de}{a} - g + \frac{cee - afe + aab}{aax}$. Nisi ergo sit $e^3 + aade +$

$a^3g = 0$, hæc Asymtota est speciei $u = \frac{A}{t}$; contra vero spe-

ciei $u = \frac{A}{tt}$. At, si $a = 0$, non existente $e = 0$, erit

$y^3 + ex = 0$: quæ dat Asymtotam parabolicam speciei $u^3 = At$. Sin autem sit $e = 0$, & $a = 0$, fiet $y^3 + dy + g = 0$, quæ æquatio vel unam præbet Asymtotam speciei $u = \frac{A}{t}$, vel tres ejusdem speciei, vel unam speciei $u = \frac{A}{t}$, &

unam speciei $uu = \frac{A}{t}$; vel unam speciei $u^3 = \frac{A}{t}$. Om-

nino ergo octo varietates occurrunt, quæ, per tres ex Factore x ortas multiplicatæ, dabunt Genera viginti-quatuor. Ergo omnes casus hæctenus tractati dant Genera *centum triginta quinque*.

C A S U S VIII.

268. Si omnes Factores sint inter se æquales, hæc æquatio locum habebit

$$y^4 + ay^2x + byxx + kx^3 + cyy + dyx + exx + fy + gx + h = 0.$$

Hic, si non fuerit $k = 0$, prodit

G E N U S C X X X V I.

Unicam habens Asymptotam parabolicam speciei $u^4 = At^3$.

Sit $k = 0$, non vero $b = 0$, erit $y^4 + byxx + exx = 0$, hincque $y^3 + bxx = 0$, & $by + e = 0$; unde, pro Asymptota recta $by + e = 0$, erit $(by + e)xx + \frac{e^2}{b^2} + \frac{ae^2x}{bb} + \frac{cee}{bb} - \frac{dex}{b} - \frac{ef}{b} + gx + h = 0$; ergo, nisi sit $ace - bdc + bbg = 0$,

Asymptota erit speciei $u = \frac{A}{t}$; contra vero speciei $u = \frac{A}{t^2}$; unde prodeunt

G E N U S C X X X V I I.

Unam habens Asymptotam parabolicam speciei $u^3 = Att$, & unam hyperbolicam speciei $u = \frac{A}{t}$, &

G E N U S C X X X V I I I.

Unam habens Asymptotam parabolicam speciei $u^3 = Att$ & unam hyperbolicam speciei $u = \frac{A}{t^2}$.

269. Sit jam $k = 0$, & $b = 0$, ut sit

$$y^4 + ay^2x + cyy + dyx + exx + fy + gx + h = 0,$$

si non sit $e = 0$, erit $y^4 + ayyx + exx = 0$, quæ æquatio si fuerit *aa* minor quam $4e$, est impossibilis, sin *aa* major quam

4^e, duas præbet Afymtotas parabolicas ad eundem Axem re-
latas, speciei $uu = At$; fin $aa = 4e$, hæ duæ Parabolæ
in unam cocunt, quibus Genera CXXXIX. CXL. & CXLI.
constituuntur.

At, si $e = 0$, ut habeatur hæc æquatio

$$y^4 + ayyx + cyy + dyx + fy + gx + b = 0,$$

si non sit $a = 0$, erit $y^4 + ayyx + cyy + dyx + gx = 0$, ergo
& $yy + ax = 0$, & $y = \text{constanti}$, erit $ayy + dy + g = 0$,
unde y vel duos habet valores diversos, vel æquales, vel nul-
lum realem. Casu primo Curva, præter unam Afymtotam pa-
rabolicam, habebit duas Afymtotas parallelas speciei $u = \frac{A}{t}$;

secundo unam speciei $uu = \frac{A}{t}$; tertio nullam: unde iterum
tria Genera constituuntur nempe CXLII. CXLIII. & CXLIV.

270. Sit nunc etiam $a = 0$, ut sit

$$y^4 + cyy + dyx + fy + gx + b = 0.$$

Hic, si non sit $d = 0$, Curva habebit Afymtotam parabo-
licam speciei $u^3 = At$, & unam rectam æquatione $dy + g = 0$,

contentam, speciei $u = \frac{A}{t}$. Denique si & $d = 0$, Curva
unam habebit Afymtotam parabolicam speciei $u^4 = At$: sic-
que omnino Linearum quarti ordinis constituta sunt Genera
centum quadraginta-sex; quæ autem singula plerumque plures
Species notabiliter differentes sub se complectuntur.

271. Ex his jam clare perspicitur quantopere Generum nu-
merus in Lineis quinti, altiorisve ordinis, multiplicetur, ut
recensio, qualem pro ordine tertio fecimus, institui prorsus
nequeat, nisi quis integrum volumen huic operi destinare ve-
lit. Quod autem ad primarias proprietates Linearum quarti
altiorisve ordinis attinet, eæ ex æquatione generali simili mo-
do derivabuntur, quo supra in Lineis tertii ordinis sumus usi,
neque idcirco earum explicationi immorabimur.

De investigatione figuræ Linearum Curvarum.

272. **Q**Uæ in his Capitibus sunt exposita, inserviunt figuræ Linearum curvarum in infinitum extensarum cognoscendæ. Cujusmodi vero figuram habeat quæpiam Linea curva in spatio finita, sæpenumero difficillimum est ex æquatione cognoscere. Oportet enim ad hoc pro quavis Abscissa finita valores Applicatæ respondententes singulos ex æquatione eruere, atque reales ab imaginariis discernere: quod negotium, si æquatio sit altioris gradus, plerumque vires Analyseos cognitæ superat. Quod si enim Abscissæ valor quicumque cognitus tribuatur, Applicata in æquatione incognitæ vicem sustinebit. Hincque a numero dimensionum, quem Applicata obtinet, pendebit æquationis resolutio. Negotium autem hoc per reductionem æquationis ad formam simpliciolem, dum & Axis commodissimus, & inclinatio Coordinatarum aptissima assumitur, valde sublevari potest: tum etiam, quia perinde est, utra Coordinatarum pro Abscissa accipiatur, labor maxime diminuetur, si ea Coordinatarum, cujus paucissimæ dimensiones in æquatione occurrunt, pro Applicata assumatur.

273. Sic, si figuras Linearum tertii ordinis, quæ ad Speciem primam pertinent, investigare velimus, assumemus æquationem pro hac Specie simplicissimam, §. 258. exhibitam, & ex Coordinatis t & u priorem t pro Applicata, alteram vero u pro Abscissa, quia t duas tantum dimensiones habet. Hujusmodi ergo æquationis formam habebimus,

$$yy = \frac{2by + axx + cx + d - uux^3}{x}$$

quæ resoluta dat

$$y =$$

$$y = \frac{b \pm \sqrt{(bb + dx + cxx + ax^3 - nux^4)}}{x}$$

existente neque b neque $n = 0$.

274. Qui ergo valores ipsius x Functioni $bb + dx + cxx + ax^3 - nux^4$ valorem affirmativum induunt, iis duplex Applicata respondet; quibus casibus vero hæc Functio evanescit, iisdem unica Applicata y Abscissæ x convenit, seu binæ Applicatæ inter se fiunt æquales. At, si Functio illa valorem negativum obtinet, tum Abscissæ nulla prorsus Applicata respondet. Sed valores istius Functionis, si fuerint affirmativi, in negativos abire nequeunt, nisi prius facti sint æquales, seu Functio evanuerit. Casus igitur potissimum erunt considerandi, quibus Functio $bb + dx + cxx + ax^3 - nux^4$ fit $= 0$; quod quidem certo duobus evenit casibus: quoniam, si x certum litem sive affirmative sive negative transgrediatur, ejus valor fit negativus. Hinc tota Curva determinato Abscissæ spatio respondebit, ultra quod omnes Applicatæ fiant imaginariæ.

275. Ponamus expressionem $bb + dx + cxx + ax^3 - nux^4$ duos tantum habere Factores reales, seu duobus tantum casibus evanescere posse; quod eveniat, si Abscissæ determinetur in punctis P & S , ubi unica tantum Applicata reperitur. Per totum ergo spatium PS Applicatæ erunt geminæ & reales, extra spatium vero PS omnes Applicatæ erunt imaginariæ: ideoque tota Curva intra Applicatas Kk & Nn jacebit. Applicata vero in initio Abscissarum A erit Asymtota Curvæ, quæ præterea Curvam in puncto quopiam secabit; si enim ponatur $x = 0$, fiet $\sqrt{(bb + dx + cxx + ax^3 - nux^4)} = b + \frac{dx}{2b}$, unde erit $y = \frac{b \pm (b + \frac{dx}{2b})}{x}$, hoc est, erit vel $y = \infty$,

vel $y = \frac{d}{2b}$. Curva ergo hoc casu ejusmodi habet formam qualem *Figura* 50. repræsentat.

276. Ponamus expressionem $bb + dx + cxx + ax^3 - nux^4$ quatuor habere Factores simplices reales inæquales; ideoque quatuor casibus evanescere. In totidem ergo locis P , Q , R &

TAB.
XIII.
Fig. 49.

TAB.
XIII.

L I B. II. & *S* Applicatæ Curvam in unico puncto stringent. Cum igitur Applicatæ per Axis spatium *XP* fuissent imaginariæ, nunc per spatium *PQ* erunt reales : tum vero per spatium *QR* erunt iterum imaginariæ, ac per *RS* rursus reales. Extra *S* vero versus *T* denuo fient imaginariæ. Hinc Curva constabit duabus partibus a se invicem separatis, quarum altera intra rectas *Kk* & *Ll*, altera intra rectas *Mm* & *Nn* continetur. Cum vero in Abcissarum initio *A* Applicatæ sint reales, necesse est ut id vel in Axis intervallo *PQ* vel *RS* sit situm. Hoc ergo casu Curva figuram habebit, qualem *Figura 51.* ostendit, scilicet constabit Ovali a reliqua Curva ad Asymtotam *DE* relata, distante, quæ vocatur OVALIS CONJUGATA.

T A B.
XIV.

277. Si duæ radices fiant inter se æquales, vel puncta *P* & *Q*, vel *Q* & *R*, vel *R* & *S*, convenient. Verum, si prius eveniat, quia *A* intra *P* & *Q* jacet, utraque radix deberet esse *x*; quod quia *b* deesse nequit, fieri non potest. Sin autem puncta *R* & *S* convenient, Ovalis conjugata fiet infinite parva, & abibit in PUNCTUM CONJUGATUM. At, si puncta *Q* & *R* convenient, Ovalis cum reliqua Curva ita conjungetur ut prodeat Curva NODATA *Figura 52.* Quod si vero tres radices congruant, seu puncta *Q*, *R* & *S* convenient, tum nodus in CUSPIDEM acutissimam evanescet, qualem *Figura 53.* repræsentat. Sic igitur quinque diversæ varietates in specie prima locum habent, ex quibus NEWTONUS totidem constituit Species.

T A B.
XIV.

T A B.
XIV.

278. Simili modo subdivisiones reliquarum Specierum a NEWTONO sunt factæ, quoniam omnes æquationes ita sunt comparatæ, ut altera Coordinata plures duabus non habeat dimensiones. Quando vero altera Coordinata unicam habet dimensionem, forma Curvæ facillime cognoscetur. Æquatio enim erit hujusmodi $y = P$, existente P Functione quapiam rationali Abcissæ *x*; quicumque ergo ipsi *x* valor tribuatur, Applicata quoque semper unum obtinet valorem, ideoque Curva continuo tractu Axem utrinque in infinitum comitabitur. Si Functio *P* sit fracta, fieri potest, ut Applicata in uno pluribusve

busve locis fiat infinita, ideoque Curvæ Asymptotam exhibeat, quod evenit ubi denominator Functionis P evanescit.

279. Ponatur ergo $y = \frac{P}{Q}$, atque istas Applicatas infinitas ostendent omnes radices reales æquationis $Q = 0$: quælibet enim radix hujus æquationis, puta $x = f$, declarat, si sumatur Abscissa $x = f$, fore Applicatam y infinitam, quia fit $Q = 0$. Tum vero patet, si fuerint Applicatæ y affirmativæ, dum esset x major quam f , eisdem, factò x minore quam f , futuras esse negativas; ideoque Applicata erit Asymptota speciei $u = \frac{A}{t}$: hocque de omnibus Factoribus inæqualibus est tenendum. Sin autem denominator Q duos habuerit Factores æquales, puta $(x - f)^2$, tum si Applicatæ sint affirmativæ sumto f majore quam x , manebunt affirmativæ si ponatur x minor f , eritque Applicata y , factò $x = f$, Asymptota speciei $uu = \frac{A}{t}$. At, si denominator Q tres habuerit Factores æquales, nempe $(x - f)^3$, tum Applicatæ ante & post illam quæ fit infinita, diversa habebunt signa, uti casu primo.

280. Post has æquationes facillime tractantur, quæ in hac forma continentur $yy = \frac{2Py - R}{Q}$, existentibus P , Q , & R Functionibus quibuscunque integris Abscissæ x . Cuique igitur Abscissæ x vel geminæ convenient Applicatæ vel nulla; duæ scilicet prodeunt Applicatæ si fuerit PP major quam QR , & nulla si PP minor quam QR : in quolibet ergo limite, qui Applicatas reales ab imaginariis seu nullis dirimit, erit $PP = QR$; ideoque fit $y = \frac{P}{Q}$, seu hæc Applicata Curvam in unico puncto stringet vel tanget. Ad Curvæ ergo formam cognoscendam consideretur æquatio $PP - QR = 0$, cujus singulæ radices reales dabunt loca, ubi Applicatæ Curvam in unico puncto stringunt. Notentur hæc puncta in Axe,

LIB. II. atque, si omnes radices fuerint inæquales, Axis partes inter hæc puncta contentæ alternatim habebunt Applicatas geminas reales, & imaginarias; sicque Curva tot constabit partibus a se invicem sejunctis, quot hujusmodi alternationes adesseprehenduntur, unde Ouales conjugatæ originem ducunt.

281. Si æquationis $PP - QR = 0$, duæ radices fiant æquales, tum illorum in Axe notatorum punctorum duo conveniant, hincque in Axe portio vel imaginarias habens Applicatas vel reales evanescet. Priori casu Curva prodibit nodata uti in *Figura 52.*; posteriori Ovalis conjugata in punctum conjugatum evanescet. Quod si autem illa æquatio tres habuerit radices æquales, Nodus fiet infinite parvus atque in Cuspide manabit, ut in *Figura 53.*; si quatuor affuerint radices æquationis æquales, vel duæ Ouales separatæ concreverint in punctum, vel in ipsa Cuspide dabitur Nodus, seu duæ Cuspides ad verticem oppositæ. Sin quinque radices æquales affuerint, novæ fere formæ non proveniunt; Cuspis enim oritur in qua non una, ut ante, sed duæ Ouales in punctum coalescunt; neque etiam major radicum æqualium multitudo novum discrimen in figuris resultantibus producit.

TAB.
XIV.

TAB.
XIV.

282. Nodus seu interseccio duorum Curvæ ramorum vocari etiam solet PUNCTUM DUPLEX, propterea quod Linea recta Curvam in eo puncto secans, eam in duobus punctis secare censenda est. Atque, si per Nodum alius Curvæ ramus transierit, tum in hac interseccione nascetur punctum Curvæ *triplex*; punctum vero *quadruplex* orietur, si duo puncta duplicia conveniant, ex quo genesis & natura punctorum quorumvis *multiplicium* perspicitur. Erit ergo etiam Ovalis evanescens, seu punctum conjugatum, punctum duplex, pariter ac Cuspis, quæ oritur a puncto conjugato cum reliqua Curva connexo.

283. Si æquatio, qua Applicata y per Abscissam x exprimitur, sit cubica vel altioris gradus, ita ut y æquetur Functioni multiformi ipsius x ; tum unicuique Abscissæ convenient vel tot Applicatæ, quot y in æquatione habet dimensiones, vel earum numerus minuetur binario vel quaternario, vel senario &c.

&c. Perpetuo ergo binæ Applicatæ simul imaginariæ esse incipiunt, atque prius quam imaginariæ evadunt, inter se fiunt æquales. Hinc ex transiitione ab imaginariis ad reales plures nascuntur varietates, quæ autem cum his, quas modo explicavimus, vel conveniunt vel ex iis ipsis sunt compositæ. Quod si autem pro plurimis Abcissis tam affirmativis quam negativis quarantur omnes Applicatæ valores, tum per hæc puncta inventa Curva facile delineabitur, ejusque figura cognoscetur.

284. Illustremus hæc exemplo, quod, quamvis ortum sit ex æquatione altioris gradus, tamen Applicata y per solas radices quadratas exprimitur. Sit nimirum

$$2y = \pm \sqrt{(6x - xx)} \pm \sqrt{(6x + xx)} \pm \sqrt{(36 - xx)}$$

ex qua æquatione cuivis Abcissæ octuplex Applicata respondet. Perspicuum autem est, si Abcissâ x statuatur negativa, tum Applicatam fore imaginariam; quod idem evenit si Abcissâ x sumatur major quam 6: ex quo tota Curva intra limites $x = 0$, & $x = 6$ continebitur. Ponantur ergo pro x successive valores, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, eritque

si	$x = 0$	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$	$x = 4$	$x = 5$	$x = 6$
$\sqrt{(6x - xx)}$	0,000	2,235	2,828	3,000	2,828	2,235	0,000
$\sqrt{(6x + xx)}$	0,000	2,645	4,000	5,196	6,324	7,416	8,484
$\sqrt{(36 - xx)}$	6,000	5,916	5,656	5,196	4,470	3,316	0,000
summa	6,000	10,796	12,484	13,392	13,622	12,967	8,484
hinc y si							
+++	3,000	5,398	6,242	6,696	6,811	6,483	4,242
—++	3,000	3,163	3,414	3,696	3,983	4,248	4,242
+—+	3,000	2,753	2,242	1,500	0,487	0,933	4,242
+—-	-3,000	-0,518	0,586	1,500	2,341	3,167	4,242

Reliquæ quatuor signorum permutationes ab his tantum ratione signorum differunt. Hinc cuilibet Abcissæ octuplex Applicata respondet, quæ si in figura exhibeantur, prædabit Linea curva

TAB.
XIV.
Fig. 54

LIB. II. duplici plexu $AFBECagbcDA$, & $afbECAGBCDa$
 constans, duas habens Cuspides in A & a , & puncta duplicia
 seu ramorum intersectiones quatuor in D , E , C & c .

C A P U T X I I I.

De Affectiionibus Linearum Curvarum.

285. **Q**uemadmodum supra ramorum in infinitum exten-
 sorum indolem ita descripsimus, ut Lineam rectam,
 vel Curvam simpliciolem, assignaverimus, quæ cum illa Curva
 in infinito confunderetur; ita in hoc Capite constituimus quam-
 vis Curvæ portionem in spatio finito existentem examini sub-
 jicere, atque rectam vel Curvam simpliciolem investigare,
 quæ cum illa Curvæ portione saltem per minimum spatium
 congruat. Ac primo quidem patet omnem Lineam rectam,
 quæ Curvam tangit, in eo loco ubi tangit, cum tractu Li-
 neæ curvæ congruere, seu cum Linea curva duo ad minimum
 puncta communia habere. Tum vero etiam aliæ Lineæ curvæ
 exhiberi possunt; quæ cum data Curvæ portione accuratius
 congruant, eamque quasi osculentur. His autem cognitis, sta-
 tus Lineæ curvæ in quovis loco, ejusque affectiiones clarissime
 erunt perspectæ.

TAB. 286. Sit igitur proposita æquatio quæcunque inter Coor-
 dinatas x & y pro Curvâ quâpiam. Tribuatur Abscissæ x
 X V. valor quispiam $AP = p$, & quærantur valores Applicatæ y
 Fig. 55. huic Abscissæ respondentes, qui si plures fuerint, sumatur pro
 lubitu unus $PM = q$, eritque M punctum in Curva, seu
 punctum per quod Curva transibit. Tum vero, si in æquatione
 inter x & y proposita, loco x scribatur p , & q loco y , om-
 nes æquationis termini se mutuo tollent, ita ut nihil rema-
 neat. Jam ad naturam illius Curvæ portionis, quæ per
 punctum M transit, indagandam, ex M ducatur recta Mq
 Axi

Axi AP parallela, quæ nunc pro Axe accipiatur, & vocetur hic nova Abscissa $Mq = t$, Applicata $qm = u$. Quia igitur punctum m pariter in Curva est positum, si mq usque ad priorem Axem in p producat, atque $Ap = p + t$ in locum ipsius x , & $pm = q + u$ in locum ipsius y substituatur, æquatio pariter identica prodire debet.

287. Facta autem hac substitutione in æquatione inter x & y proposita, omnes termini, in quibus neque t nec u inest, se mutuo sponte destruent, illique termini, qui novas Coordinatas t & u continent, soli supererunt. Hinc ergo ejusmodi prodibit æquatio

$$0 = At + Bu + Ct^2 + Dtu + Euu + Ft^3 + Gt^2u + Htuu + \&c.;$$

ubi A, B, C, D , &c. sunt quantitates constantes ex constantibus primæ æquationis & ipsis p & q , quas nunc pro constantibus habemus, compositæ. Ita igitur nova æquatione natura ejusdem Curvæ exprimitur, verum ad Axem Mq refertur, & in quo ipsum Curvæ punctum M pro initio Abscissarum assumitur.

288. Ac primo quidem patet, si ponatur $Mq = t = 0$, tum quoque fore $qm = u = 0$, quia punctum m in M incidit. Deinde, quia tantum minimam Curvæ portionem circa M versantem indagare volumus, hoc impetrabimus, si pro t valores quam minimos assumamus; quo casu quoque $qm = u$ valorem habebit minimum; naturam enim Arcus Mm quasi evanescentis tantum desideramus. Quod si vero pro t & u sumantur valores quam minimi, termini tt , tu , & uu multo adhuc erunt minores, atque sequentes t^3 , t^2u , tuu , u^3 , &c., multo quoque erunt minores quam illi, & ita porro: quam ob causam, cum termini minimi præ aliis quasi infinite majoribus omitti queant, remanebit ista æquatio $0 = At + Bu$, quæ est æquatio pro Linea recta $M\mu$ per punctum M transeunte, atque indicat hanc rectam, si punctum m ad M proxime accedat, cum Curva congruere.

LIB. II. 289. Erit ergo hæc recta $M\mu$ Tangens Curvæ in loco M , ideoque hinc ad quodvis punctum Curvæ M Tangens μMT duci potest. Scilicet, cum ex æquatione $At + Bu = 0$, fit $\frac{u}{t} = \frac{-A}{B} = \frac{q\mu}{Mq}$, erit $q\mu : Mq = MP : PT = A : B$. Ergo, cum sit $PM = q$, fiet $PT = \frac{-Bq}{A}$: vocari autem hæc Axis portio PT solet SUBTANGENS. Ex his ergo hæc deducitur

R E G U L A

Pro invenienda Subtangente.

In æquatione pro Curva, postquam Abscissæ $x = p$ inventa fuerit satisfacere Applicata $y = q$, ponatur $x = p + t$, & $y = q + u$; ex terminis autem, qui per substitutionem oriuntur, ii tantum retineantur, in quibus t & u unicam dimensionem tenent, reliquis omnibus neglectis. Sicque ad duos tantum terminos $At + Bu = 0$ pervenietur: unde, cognitis A & B , erit Subtangens $PT = \frac{-Bq}{A}$.

E X E M P L U M I.

Sit proposita Curva Parabola, cujus natura hac exprimitur æquatione $yy = 2ax$, existente AP Axe principali & A Vertice.

Sumatur $AP = p$; & si vocetur $PM = q$, erit $qq = 2ap$, seu $q = \sqrt{2ap}$. Jam ponatur $x = p + t$ & $y = q + u$, eritque $qq + 2qu + uu = 2ap + 2at$: unde, per regulam, hi tantum termini $2qu = 2at$ retineantur, qui dant $at - qu = 0$, $\frac{u}{t} = \frac{a}{q} = \frac{-A}{B}$, erit ergo Subtangens $PT = \frac{qq}{a} = 2p$, ob $qq = 2ap$. Hinc Subtangens PT erit dupla Abscissæ AP .

EXEMPLUM II.

CAP.
XIII.

Sit Curva Ellipsis Centro A descripta, cujus aequatio est $yy = \frac{b}{a} (aa - xx)$, seu $aa yy + bbxx = aabb$.

Sumta ergo $AP = p$. & posita $PM = q$, erit $aaqq + bbpp = aabb$. Jam ponatur $x = p + t$ & $y = q + u$; & quoniam ii tantum termini retineri debent, in quibus t & u unicum habent dimensionem, reliqui statim omitti possunt; fietque $2aaqu + 2bbpt = 0$, unde $\frac{u}{t} = \frac{-bbp}{aaq} = \frac{-A}{B}$. Erit ergo Subtangens $PT = \frac{-B}{A} q = \frac{-aaqq}{bbp} = \frac{-aa + pp}{p}$: quæ expressio, cum sit negativa, indicat punctum T in partem contrariam cadere. Ceterum hæc expressio egregie convenit cum determinatione Tangentium Ellipsis supra tradita.

EXEMPLUM III.

Sit præposita Linea tertii ordinis Speciei septimæ $yyx = axx + bx + c$.

Sumta ergo $AP = p$, & posita $PM = q$, erit $pqq = app + bp + c$. Jam statuatur $x = p + t$ & $y = q + u$, eritque $(p + t)(qq + 2qu + uu) = a(pp + 2pt + tt) + b(p + t) + c$. Rejctis omnibus terminis superfluis, erit $2pqu + qqt = 2apt + bt$, unde fit $\frac{u}{t} = \frac{2ap + b - qq}{2pq} = \frac{-A}{B}$; ideoque Subtangens $PT = \frac{-B}{A} q = \frac{2pq q}{2ap + b - qq} = \frac{2app + 2bp + 2c}{2ap + b - qq} = \frac{2ap^3 + 2bpp + 2cp}{app - c}$, vel $PT = \frac{2ppq q}{app - c}$.

290. Cognita ergo hoc modo Tangente Curvæ, simul cognoscitur directio, quam Curva sequitur in puncto M . Linea enim Curva aptissime considerari potest tanquam via, quam describit punctum continuo promotum cum variata continuo motus

LIB. II.

motus directione. Ideoque punctum, quod Curvam $M\mu$ motu suo describit in M promovebitur secundum directionem Tangentis $M\mu$; quam directionem si conservaret, describeret rectam $M\mu$: at e vestigio directionem motus inflectit, si quidem Lineam curvam describit: unde ad tractum Lineæ curvæ cognoscendum in singulis punctis positionem Tangentis definire oportet, id quod facile fit methodo hic tradita, neque enim ulla offenditur difficultas, dummodo æquatio pro Curva proposita fuerit rationalis atque a fractionibus libera. Ad talem autem formam æquationes omnes semper reduci possunt. Sin autem æquatio fuerit vel irrationalis vel fractionibus implicata, neque eam ad formam rationalem & integram reducere vacaverit, tum eadem quidem methodus, at cum moderatione quadam, adhiberi potest, quæ ipsa moderatio *Calculus differentialem* produxit; quam ob rem methodum inveniendi Tangentes, si æquatio pro Curva proposita non fuerit rationalis & integra, in calculum differentialem reservabimus.

291. Hinc ergo innotescit inclinatio Tangentis $M\mu$ ad Axem AP , seu ejus parallelam Mq . Cum enim sit $q\mu$: $Mq = -A:B$, si Coordinatæ fuerint orthogonales ideo-

que angulus $Mq\mu$ rectus, erit $\frac{-A}{B}$ Tangens anguli $qM\mu$; sin autem Coordinatæ fuerint obliquangulæ, tum ex angulo $Mq\mu$ dato & ratione laterum Mq , $q\mu$ per Trigonometriam reperietur angulus $qM\mu$. Patet autem, si in æquatione resultante $Ax + By = 0$, fuerit $A = 0$, tum angulum $qM\mu$ evanescere, ideoque Tangentem $M\mu$ fore Axi AP parallelam. Sin autem fuerit $B = 0$, tum Tangens $M\mu$ Applicatis PM erit parallela, seu ipsa Applicata PM Curvam in puncto M tanget.

292. Inventa Tangente MT , si ad eam in puncto contactus M ducatur normalis MN , erit hæc ad ipsam Curvam simul normalis; cujus propterea positio quovis casu facile reperitur. Commodissime autem exprimitur, si Coordinatæ AP & PM fuerint orthogonales, tum enim erunt triangula $M\mu\mu$ & MPN similia;

familia, ideoque $Mq : q\mu = MP : PN$, seu $B : A = g : PN$; unde fit $PN = \frac{Ag}{B}$. Vocari autem hæc Axis portio PN , inter Applicatam & Normalem MN intercepta, solet SUBNORMALIS. Hæc igitur Subnormalis, si Coordinatæ fuerint orthogonales, ex inventa Subtangente PT facillime definitur; erit enim $PT : PM = PM : PN$, seu $PN = \frac{PM^2}{PT}$. Præterea vero, si angulus APM fuerit re-ctus, erit ipsa tangens $MT = \sqrt{PT^2 + PM^2}$ & ipsa normalis $MN = \sqrt{PM^2 + PN^2}$; seu, cum sit $PT : TM = PM : MN$, erit $MN = \frac{PM \cdot TM}{PT} = \frac{PM}{PT} \sqrt{PT^2 + PM^2}$.

293. Quoniam vidimus, si in æquatione $At + B\mu = 0$, fuerit vel $A = 0$ vel $B = 0$, tum Tangentem fore vel Axi vel Applicatis parallelam; superest casus, quo uterque coëfficiens A & B simul fit $= 0$, considerandus. Hoc ergo cum evenit, in æquatione supra (§. 286.) inventa, sequentes termini, in quibus t & μ duas obtinent dimensiones, non amplius præ his $At + B\mu$, (qui ipsi evanescent,) negligi poterunt. Hanc ob rem consideranda veniet hæc æquatio $0 = Ctt + Dtu + E\mu\mu$, neglectis sequentibus terminis; quippe qui præ his, si t & μ statuuntur infinite parva, evanescent. Ex hac igitur æquatione, uti ex generali, manifestum est, si ponatur $t = 0$, fore & $\mu = 0$, ideoque M esse punctum in Curva, quod quidem Hypothesi est consentaneum.

294. Cum igitur hæc æquatio $0 = Ctt + Dtu + E\mu\mu$ statum Curvæ prope punctum M declaret; manifestum est, si fuerit DD minor quam $4CE$, tum æquationem fore imaginariam, nisi sint t & $\mu = 0$. Hoc igitur casu punctum M quidem ad Curvam pertinebit, verum erit sejunctum a reliqua Curva; eritque ideo Ovalis conjugata in punctum evanescens, cujusmodi casum in Capite præcedente notavimus. Hic igitur ne idea quidem Tangentis locum habet; quia, si Tan-

LIB. II. gens est recta duo puncta proxima cum Curva habens communia, punctum a recta tangi hoc modo non potest. Hoc itaque pacto punctum conjugatum, si quod datur in Curva quapiam, agnosceretur atque a reliquis Curvæ punctis discernetur.

T A B.
XV.
Fig. 56.

295. Quod si autem fuerit DD major quam $4CE$, æquatio $0 = Ctt + Dtu + Euu$ resolvable erit in duas æquationes hujus formæ $at + \epsilon u = 0$, quarum utraque in Curvæ naturam æque competit. Cum igitur utraque positionem Tangentis seu directionem Curvæ in puncto M exhibeat, necesse est ut duo Curvæ rami se in puncto M decussent, ibique punctum duplex constituent. Sumta scilicet $Mq = t$, sint $q\mu$ & qv ambo valores ipsius u , quos illa æquatio præbet, atque rectæ $M\mu$ & Mv erunt ambæ Tangentes Curvæ in puncto M . In M ergo erit intersectio duorum Curvæ ramorum, quorum alter secundum Mu , & alter secundum Mv dirigitur. Cum igitur punctum conjugatum pariter pro puncto duplici sit habendum, hæc æquatio $Ctt + Dtu + Euu = 0$, semper punctum duplex indicabit, quemadmodum æquatio $At + Bu = 0$, quoties locum habet, punctum Curvæ tantum simplex declarat.

296. Sin autem fuerit $DD = 4CE$, tum ambæ istæ Tangentes $M\mu$ & Mv coincident, & angulus μMv evanescet; ex quo intelligitur duos Curvæ ramos in M non solum concurrere, sed etiam eandem directionem habere, ideoque se invicem tangere; quo casu punctum M nihilominus erit duplex, quia recta per hoc punctum ducta Curvam hoc loco in duobus punctis secare est censenda. Quando ergo in æquatione . quam §. 286. obtinimus, ambo coëfficientes primi A & B evanescunt, tum concludenda est Curva in M punctum duplex habere, cujus tres dantur Species diversæ; vel Ovalis in punctum evanescens seu punctum conjugatum, vel duorum Curvæ ramorum intersectio mutua seu nodus, vel duorum Curvæ ramorum contactus, quas diversas puncti duplicis Species triplex æquationis $0 = Ctt + Dtu + Euu$ constitutio definit.

297. Si præter coëfficientes A & B , etiam hi tres C , D , & E omnes evanescant, tum sequentes sumi debebunt termini, in quibus t & u tres obtinent dimensiones, eritque $Ft^3 + Gttu + Httu + Iu^3 = 0$. Quæ æquatio si unicum habeat Factorem simplicem realem, hic ostendet unum Curvæ ramum per punctum M transeuntem ejusque simul directionem seu Tangentem; bini vero reliqui Factores imaginarii in ipso puncto M Ovalem evanescentem, arguent. Sin autem omnes radices illius æquationis fuerint reales, hinc cognoscetur tres Curvæ ramos se in eodem puncto M vel decussare vel tangere, prout illæ radices fuerint vel inæquales vel æquales. Quicquid horum evenerit, Curva in M semper habebit punctum triplex, atque recta per M ducta Curvam simul in tribus punctis secare putanda est.

298. Quod, si præter omnes coëfficientes præcedentes etiam hi quatuor F , G , H , & I evanescant; tum, ad naturam puncti Curvæ M cognoscendam, contemplari oportebit terminos æquationis sequentes, in quibus t & u quatuor habeant dimensiones: unde punctum M quadruplex erit judicandum. In eo enim vel duæ Ovale conjugatæ coalescunt; quod evenit si æquationis quarti gradus omnes radices fuerint imaginariæ. Vel in M erit intersectio seu contactus duorum Curvæ ramorum cum puncto conjugato; quod evenit si duæ radices fuerint reales, duæ reliquæ vero imaginariæ. At in M denique erit intersectio quatuor Curvæ ramorum, si omnes radices æquationis fuerint reales; intersectio autem vel duorum vel trium vel omnium quatuor abibit in contactum, si duæ tres vel omnes quatuor radices fiant æquales. Simili autem modo in judicio erit progrediendum, si etiam his terminis, ubi t & u quatuor obtinent dimensiones, evanescentibus, procedendum erit ad terminos quinque ulteriorumve dimensionum.

299. His perpensis, facile erit æquationem generalem pro omnibus Curvis invenire quæ non solum per punctum M transeat, sed etiam in M habeant punctum vel simplex vel

LIB. II. duplex, vel triplex, vel totuplex, prout quis voluerit. Pofitis enim $AP = p$, $PM = q$, ac denotantibus P , Q , R , S , &c. Functiones quascunq; Coordinatarum x & y , manifeftum est hanc æquationem $P(x - p) + Q(y - q) = 0$, exprimere Curvam per punctum M tranfeuntem; fi enim ponatur $x = AP = p$, fiet $y = PM = q$; dummodo neque P per $y - q$, nec Q per $x - p$ fuerit divifibile, vel dummodo hi Factores $x - p$ & $y - q$, a quibus transitus Curvæ per punctum M pendet, ex æquatione per divifionem non eliminentur. Perfpicuum autem est omnes Curvas, quæ quidem per punctum M tranfeant, in ifta æquatione $P(x - p) + Q(y - q) = 0$, contineri; erit vero M punctum simplex, fi hæc æquatio non fuerit ejus formæ, qualem pro punctis multiplicibus mox exhibebimus.

300. Si M debeat eſſe punctum duplex, æquatio pro Curva in hac forma generali continebitur $P(x - p)^2 + Q(x - p)(y - q) + R(y - q)^2 = 0$, dummodo hæc forma per divifionem non pereat. Perfpicitur hinc in Lineas ſecundi ordinis punctum duplex cadere non poſſe, quo enim illa æquatio ſecundi ſit, neceſſe eſt ut P , Q , & R ſint quantitates conſtantes; tum autem æquatio non erit pro Linea curva, ſed præ duabus rectis. Sin autem P , Q , R ſint Functiones primi ordinis, ut $ax + cy + d$, tum Lineæ habebuntur tertii ordinis in M punctum duplex habentes. At vero Linea tertii ordinis, niſi ex tribus rectis conſtet, plus uno puncto duplici habere nequit. Ponamus enim dari duo puncta duplicia, atque per ea Lineam rectam duci; hæc Linea recta Curvam in quatuor punctis ſecaret, quod naturæ Linearum tertii ordinis adverſatur. Linea quarti ordinis duo tantum habebit puncta duplicia; Linea quinti ordinis plura tribus habere non poterit, & ita porro.

301. Sit M punctum Curvæ triplex, atque natura Lineæ curvæ hac exprimetur æquatione $P(x - p)^3 + Q(x - p)^2(y - q) + R(x - p)(y - q)^2 + S(y - q)^3 = 0$. Hæc æquatio igitur ſi Lineam curvam definiat, tertium ordinem ſuperabit,

perabit ; namque si $P, Q, R,$ & S essent constantes , quod Linearum tertii ordinis natura exigit , tum æquatio tres haberet Factores formæ $\alpha(x-p) + \mathcal{C}(y-q)$, ideoque foret pro tribus rectis. In Curvas ergo quarto ordine simpliciores punctum triplex non cadit ; neque Lineæ quinti ordinis plus uno puncto triplici habere possunt , alioquin enim daretur recta Lineam quinti ordinis in sex punctis secans. Nihil autem impedit quo minus Linea sexti ordinis duo habeat puncta triplicia. CAP. XIII.

302. Si æquatio in hac forma contineatur : $P(x-p)^4 + Q(x-p)^3(y-q) + R(x-p)^2(y-q)^2 + S(x-p)(y-q)^3 + T(y-q)^4 = 0$, tum Curva in M habebit punctum quadruplex. Linea ergo curva simplicissima , quæ puncto quadruplici gaudeat , ad Linearum ordinem quintum pertinebit. Duo vero puncta quadruplicia non cadunt nisi in Lineas aut octavi aut altioris gradus. Simili modo æquationes generales exhiberi possunt pro Lineis , quæ in M habeant punctum quintuplex , vel pro lubitu multiplex.

303. Quod , si autem M fuerit vel punctum duplex vel triplex vel utcumque multiplex , tum vel totidem Curvæ rami se mutuo in puncto M secabunt sive tangent ; vel , si numerus ramorum se interfecantium sit minor , tum unum plurave puncta conjugata in eodem puncto M concrefcent : qui Curvæ status cognoscetur ex iis , quæ ante sunt tradita. Scilicet , in Functionibus $P, Q, R, S,$ &c. , ubique loco x & y scribi debent p & q , & t & u loco Factorum $x-p$ & $y-q$; tum enim prodibunt ejusmodi æquationes , ex quibus constitutio Curvæ & ramorum se in M interfecantium Tangentes definiri poterunt.

De curvatura Linearum curvarum.

304. **Q**uemadmodum in superiori Capite lineas rectas indagavimus, quæ in quovis puncto Lineæ curvæ ipsius directionem indicabant, ita hic Lineas curvas simpliciores investigabimus, quæ in quovis loco cum Curva proposita tam exacte congruant, ut saltem per minimum spatium quasi confundantur. Sic enim cognita indole Curvæ simplicioris, simul Curvæ propositæ natura inde colligetur. Simili methodo scilicet hic utemur, qua supra ad naturam ramorum in infinitum extensorum scrutandam sumus usi; primo videlicet investigando Lineam rectam, quæ Curvam tangat, deinde vero Lineam curvam simpliciore, quæ cum Curva proposita multo magis conveniat, eamque non solum tangat, sed quasi osculetur. Vocari autem ejusmodi Linearum curvarum arctissimus contactus solet OSCULATIO.

TAB. XV. Fig. 55. 305. Sit igitur proposita æquatio quæcunque inter Coordinatas orthogonales x & y , atque ad naturam minimæ Curvæ portionis Mm circa punctum M versantis indagandam, cum inventa sit Abscissa $AP = p$ & Applicata $PM = q$, ponatur in Axe MR Abscissa minima $Mq = t$, & Applicata $qm = u$; eritque $x = p + t$, & $y = q + u$; quibus valoribus in æquatione substitutis, perveniatur ad hanc æquationem

$$0 = At + Bu + Ct^2 + Dt u + Eu^2 + Ft^3 + Gt^2 u + \&c.,$$

quæ exprimet naturam Curvæ ejusdem ad Axem MR relatæ. Quoniam autem has novas Coordinatas t & u minimas statuimus, sequentes termini quasi infinites erunt minores quam antecedentes; ideoque præ his sine errore rejici poterunt.

306. Nisi ergo ambo coëfficientes primi A & B evanescant, rejeclis

rejectis sequentibus terminis omnibus, æquatio $0 = At + Bu$ ostendet Lineam rectam $M\mu$ quæ Curvam in puncto M tanget, hocque loco cum Curva communem habet directionem. Erit ergo $Mq : q\mu = B : -A$; unde, ob cognitæ quantitates A & B , positio Tangentis $M\mu$ innotescit, quæ cum Curvam in puncto tantum M contingat, videamus quantum Curvam Mm porro a recta $M\mu$ saltem per minimum spatium aberret. In hunc finem assumamus normalem MN pro Axe, in quem ex m Applicata orthogonalis mr ducatur, ac vocetur

$$Mr = r; rm = s; \text{ erit } t = \frac{-Ar + Bs}{\sqrt{A^2 + B^2}} \text{ \& } u = \frac{-As - Br}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

$$\text{\& } r = \frac{-At - Bu}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \text{ \& } s = \frac{Bs - Au}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \text{ Quare, cum sit}$$

$$-At - Bu = Ct^2 + Dtu + Eu^2 + Ft^3 + Gtu + \&c.,$$

erit r quantitas infinities minor, quam t & u , ac propterea erit quoque r quantitas infinities minor quam s ; nam s per t & u , at r per ipsarum t & u quadrata vel potestates superiores determinatur.

307. Naturam ergo Curvæ Mm multo propius cognoscemus, si terminos quoque $Ct^2 + Dtu + Eu^2$ in computum ducamus, atque sequentes tantum negligamus; sicque habebimus inter t & u hanc æquationem $-At - Bu = Ct^2 + Dtu + Eu^2$, in qua si loco t & u valores superiores substituamus, habebimus $r\sqrt{A^2 + B^2} = \frac{(A^2C + ABD + B^2E)rr}{A^2 + B^2} +$

$$\frac{(A^2D - B^2D - 2ABC + 2ABE)rs}{A^2 + B^2} + \frac{(A^2E - ABD + B^2C)ss}{A^2 + B^2}.$$

At, quia r infinities minor est quam s , termini rr & rs præ termino ss evanescent, fietque $ss = \frac{(A^2 + B^2)r\sqrt{A^2 + B^2}}{A^2E - ABD + B^2C}$, quæ æquatio exprimit naturam Curvæ Curvam propositam in M osculantis.

308. Curvæ ergo Arcus minimus Mm congruet cum Vertice Parabolæ super Axe MN descriptæ, cujus Latus rectum seu

LIB. II. seu Parameter est $= \frac{(A^2 + B^2) \sqrt{(A^2 + B^2)}}{A^2 E - ABD + B^2 C}$: unde qualis est

curvatura hujus Parabolæ in vertice talis erit Curvæ propositæ curvatura in puncto M . Cum autem nullius Curvæ curvatura distinctius cognoscatur quam Circuli, quoniam ipsius curvatura ubique est eadem, eoque major existit, quo minor fuerit radius; commodius erit curvaturam Curvarum definire per Circulum æqualis curvaturæ, qui *Circulus osculator* vocari solet. Hanc ob rem oportebit Circulum definire cujus curvatura conveniat cum curvatura propositæ Parabolæ in ipsius Vertice, quo tum Circulum istum in locum Parabolæ osculantis substituere liceat.

309. Ad hoc efficiendum, contemplemur curvaturam Circuli tanquam incognitam, eamque modo exposito per curvaturam Parabolæ exprimamus, sic enim vicissim pro Parabola osculante Circulus osculator substitui poterit. Sit igitur Curva Mm proposita Circulus radio $= a$ descriptus, cujus natura exprimitur æquatione $yy = 2ax - xx$. Sumta ergo $AP = p$, & $PM = q$ erit, $qq = 2ap - pp$. Jam ponatur $x = p + t$ & $y = q + u$, atque oriatur hæc æquatio $qq + 2qu + uu = 2ap + 2at - pp - 2pt - tt$, quæ, ob $qq = 2ap - pp$, reducit ad hanc formam $0 = 2at - 2pt - 2qu - tt - uu$, quæ cum superiori forma comparata dat $A = 2a - 2p$; $B = -2q$; $C = -1$, $D = 0$, & $E = -1$, unde fit $AA + BB = 4(aa - 2ap + pp + qq) = 4aa$, & $(AA + BB) \sqrt{(AA + BB)} = 8a^3$ atque $AAE - ABD + BBC = -AA - BB = -4aa$. Unde Circulum, cujus radius $= a$, in quovis puncto osculatur Parabolæ vertex, cujus natura exprimitur æquatione $ss = 2ar$; ideoque vicissim quam Curvam osculatur Vertex Parabolæ $ss = br$, eandem osculabitur Circulus, cujus radius est $= \frac{1}{2} b$.

310. Cum igitur supra invenerimus Curvam Mm osculari Parabolam cujus æquatio sit $ss = \frac{(AA + BB) \sqrt{(A^2 + B^2)}}{A^2 E - ABD + B^2 C} r$,
mani-

manifestum est ejusdem Curvæ curvaturam in M convenire cum curvatura Circuli, cujus radius sit $= \frac{(A^2 + B^2)\sqrt{(A^2 + B^2)}}{2(A^2E - ABD + B^2C)}$.

Hæc ergo expressio dat radium Circuli osculatoris, atque iste radius quoque vocari solet *Radius osculi*; sæpe etiam *radius curvedinis* seu *curvatura* appellatur. Ex æquatione ergo inter t & u , quam ex æquatione inter x & y proposita eliciimus, statim definiri potest radius osculi Curvæ in puncto M , seu radius Circuli osculantis Curvam in M . In æquatione enim inter t & u rejiciantur termini, in quibus t & u plures duabus dimensiones obtinent, atque ex æquatione, quæ erit hujus formæ

$$0 = At + Bu + Ctt + Dtu + Euu,$$

invenietur radius osculi $= \frac{(A^2 + B^2)\sqrt{(A^2 + B^2)}}{2(A^2E - ABD + B^2C)}$.

311. Quoniam vero signum radicale $\sqrt{(A^2 + B^2)}$ ambiguitatem signi involvit, incertum est utrum ista expressio sit affirmativa an negativa, scilicet utrum concavitas Curvæ punctum N respiciat, an convexitas. Ad hoc dubium tollendum quæri debet utrum Curvæ punctum m intra Tangentem $M\mu$ versus Axem AN sit positum, an vero extra Tangentem cadat. Priori casu Curva versus N erit concava, atque Centrum Circuli osculantis in rectæ MN portionem versus Axem protensam incidet; posteriori casu vero in portionem rectæ NM ultra M productam. Omnis ergo dubitatio evanescet si inquiratur, utrum qm sit minor quam $q\mu$, an major; priori enim casu Curva versus N erit concava, posteriori vero convexa.

312. Est vero $q\mu = \frac{-At}{B}$, & $qm = u$, quare videndum est utrum sit $\frac{-At}{B}$, major minorve quam u . Quia igitur $m\mu$ est Lineola quam minima, ponatur $m\mu = w$, erit
Euleri *Introduct. in Anal. infin. Tom. II.* Y que

LIB. II. que $u = \frac{At}{B} - w$; unde, facta substitutione, fit $0 =$

$$-Bw + Ctt - \frac{ADtt}{B} - Dtw + \frac{A^2Ett}{BB} + \frac{2AEt w}{B} + Ew^2;$$

ubi, ob w præ t minimum, termini tw & w^2 evanescent.

Hinc fit $w = \frac{(B^2C - ABD + A^2E)tt}{B^3}$. Quod si ergo w

fuerit quantitas affirmativa, quod evenit si $\frac{B^2C - ABD + A^2E}{B^3}$,

seu $\frac{A^2E - ABD + B^2C}{B}$ fuerit quantitas affirmativa, tum Curvæ

erit concava versus N ; sin autem $\frac{A^2E - ABD + B^2C}{B}$ fuerit

quantitas negativa, Curvæ convexitas punctum N respiciet.

TAB. 313. Quo hæc clariora reddantur, diversi casus qui occurrere possunt, seorsim sunt evolvendi. Sit igitur primum $B=0$,
 XV. quo casu ipsa Applicata PM erit Tangens Curvæ Mm , &
 Fig. 57. radius osculi erit $= \frac{A}{2E}$. Utrum autem Curva sit concava

versus R , uti Figura præsentat, an convexa, ex æquatione

$0 = At + Ctt + Dtu + Euu$ intelligitur. Cum enim fit

$Mq = t$ & $qm = u$, ob t infinities minus quam u , termini

tt & tu præ uu evanescent, eritque $At + Euu = 0$; ex

qua æquatione intelligitur, si coëfficientes A & E habeant

contraria signa, seu si $\frac{E}{A}$ fuerit quantitas negativa, tum

Curvam fore concavam versus R . At, si coëfficientes A &

E habeant paria signa, & $\frac{E}{A}$ fuerit quantitas affirmativa, tum

Curva ad alteram Tangentis partem erit sita; Abscissa enim

Mq statui debet negativa quo Applicata qm respondeat realis.

TAB. 314. Sit nunc Tangens $M\mu$ inclinata ad Axem AP seu
 XV. ipsi parallelam, ita ut angulus $RM\mu$ sit acutus, & normalis
 Fig. 55. MN Axem in N ultra P secet: quo casu Abscissis t respon-
 debunt Applicatæ u affirmativæ; unde coëfficientes A & B
 signa

LIB. II. $aaaa + bbpp + 2bbpt + bbtt = aabb$, seu $2bbpt + 2aaqu + bbtt + aaaa = 0$. Primum ergo, ob coefficientes ipsarum t & u , normalis MN citra P cum Axe concurret: eritque $PjM: PN = B: A = aaq: bbp$ & $PN = \frac{b^h p}{a a}$, ob $A = 2bbp$ & $B = aaq$. Præterea vero, ob $C = bb$, $D = 0$ & $E = aa$, erit $\frac{AAE - ABD + B^2C}{B} = \frac{4aabb(aaq + bbpp)}{2aaq} = \frac{4a^4b^4}{2aaq}$; ideoque quantitas affirmativa, qua indicatur Curvam versus N esse concavam.

317. Ad ipsum jam radium osculi inveniendum, est $A^2 + B^2 = 4(a^4qq + b^4pp)$, & $A^2E - ABD + B^2C = 4a^4b^4$; unde radius osculi erit $= \frac{(a^4qq + b^4pp)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}$. At est $MN = \sqrt{(qq + \frac{b^4pp}{a^4})}$, unde $\sqrt{(a^4qq + b^4pp)} = aa.MN$, ideoque radius osculi $= \frac{a^2.MN^3}{b^4}$. Si in normalem MN productam ex Centro A ducatur perpendicularum AO , erit, ob $AN = p - \frac{bbp}{aa}$ & triangula MNP & ANO similia, $NO = \frac{aabbpp - b^4pp}{a^4.MN}$ & $MO = NO + MN = \frac{aaqq + bbpp}{aa.MN} = \frac{bb}{MN}$; unde $MN = \frac{bb}{MO}$, hincque radius osculi $= \frac{aa.bb}{MO^3}$, quæ expressio ad utrumque Axem AD & AC æque est accommodata.

318. Invento autem pro quovis Curvæ loco radio osculi, natura Curvæ satis clare perspicitur. Si enim portio Curvæ in partes plurimas quam minimas dividatur, unaquæque particula haberi potest pro Arculo Circuli, cujus radius erit ipse radius osculi in eo loco. Hinc vero etiam descriptio Curvæ per plurima puncta multo accuratius absolvetur. Postquam enim

LIB. II. directum erunt sita. Quo igitur his casibus natura Curvæ penitus perspiciatur, substitutio $t = \frac{-Ar + Bs}{\sqrt{(AA + BB)}}$ & $u = \frac{-As - Br}{\sqrt{(AA + BB)}}$, etiam in terminis $Fr^3 + Gtu + Htu + Iu^3$ est instituenda. Cum autem præ termino primo $r\sqrt{(A^2 + B^2)}$ omnes termini sequentes, qui r continent, evanescant, his terminis rejectis, atque substitutione per totam æquationem facta, obtinebitur ejusmodi æquatio

$$r\sqrt{(A^2 + B^2)} = \alpha s^5 + \zeta s^3 + \gamma s^4 + \delta s^5 + \&c.$$

321. Ex hac æquatione jam statim colligitur, ut supra, radius osculi $= \frac{\sqrt{(AA + BB)}}{2\alpha}$; sin autem sit $\alpha = 0$, quo casu radius osculi sit infinitus, ad Curvæ naturam exactius cognoscendam, sumi debet terminus sequens ζs^3 , ita ut sit $r\sqrt{(A^2 + B^2)} = \zeta s^3$ nisi enim sit $\zeta = 0$, termini sequentes γs^4 , δs^5 , &c., omnes præ hoc evanescent. Curvam ergo hoc casu in M osculabitur Curva hac æquatione $r\sqrt{(A^2 + B^2)} = \zeta s^3$ expressa, ex qua simul figura Curvæ circa punctum M cognoscetur. Cum igitur Abscissæ r negative sumtæ negativus valor Applicatæ s respondeat, Curva circa M figuram habebit anguineam $mM\mu$, ideoque in M habebit punctum flexus contrarii.

T A B.
XVI.
Fig. 61.

322. Quod, si præter α etiam fiat $\zeta = 0$, tum natura Curvæ circa M exprimetur hac æquatione $r\sqrt{(A^2 + B^2)} = \gamma s^4$, ex qua cum unicuique Abscissæ r duplex Applicata s respondeat, altera affirmativa, altera negativa, neque Abscissa r utrinque sumi queat, utraque Curvæ portio Mm & $M\mu$ ad eandem Tangentis partem erit posita. At si, ob α, ζ , & γ evanescentes, natura Curvæ circa M exprimat æquatione $r\sqrt{(A^2 + B^2)} = \delta s^5$, tum Curva ad M iterum habebit punctum flexus contrarii uti in *Figura 61*. Sin autem fuerit etiam $\delta = 0$, ut fiat $r\sqrt{(A^2 + B^2)} = \epsilon s^6$, tum Curva iterum

T A B.
XVI.
Fig. 62.

T A B.
XVI.

iterum puncto flexus contrarii destituetur, uti *Figura 62*. Atque generaliter, si exponens ipsius s fuerit numerus impar, Curva in M habebit punctum flexus contrarii; sin autem exponens ipsius s fuerit numerus par, Curva carebit puncto flexus contrarii uti *Figura 62*.

CAP.
XIV.

TAB.
XVI.

323. Hæc igitur sunt Curvarum phænomena, si punctum M fuerit simplex, seu si in æquatione

$$0 = At + Bu + Ct^2 + Dtu + Eu^2 + Ft^3 + \&c.,$$

non uterque coëfficiens A & B simul evanescat. Quod si autem fuerit & $A=0$, & $B=0$, Curvaque habuerit duos pluresve ramos se in puncto M intersecantes, uniuscujusque rami curvatura & indoles in M investigabitur seorsim, ut ante. Sit enim pro Tangente cujusvis rami $mt + nu = 0$, & quærat æquatio pro hoc ramo inter Coordinatas r & s , quarum illa r in normali MN capiatur, ut sit r infinities minor

TAB.
XV.

Fig. 56.

TAB.
XV.

Fig. 55.

quam s . Poni ergo debet $t = \frac{-ny + ns}{\sqrt{(m^2 + n^2)}}$ & $u = \frac{-ms - m}{\sqrt{(m^2 + n^2)}}$;

quo factò & neglectis terminis ob infinitam parvitatem præ reliquis evanescentibus, prodibit, si M fuerit punctum duplex, hujusmodi æquatio $rs = \alpha s^3 + \zeta s^4 + \gamma s^5 + \delta s^6 + \&c.$: sin autem M fuerit punctum triplex, talis $rss = \alpha s^4 + \zeta s^5 + \gamma s^6 + \&c.$, & ita porro: quæ æquationes omnes reducuntur ad hanc formam

$$r = \alpha ss + \zeta s^3 + \gamma s^4 + \delta s^5 + \&c.$$

324. Ex hac æquatione intelligitur istius Curvæ rami, quem consideramus, in M esse radium osculi $= \frac{1}{2\alpha}$, qui, si $\alpha = 0$, fiet $= \infty$. Hoc ergo casu natura Curvæ exprimetur vel hac æquatione $r = \zeta s^3$, vel $r = \gamma s^4$, vel $r = \delta s^5$, &c.; ex quibus, ut ante, colligetur Curvæ ramum in M vel punctum flexus contrarii habere, vel tali carere. Prius scilicet evenit, si exponens ipsius s fuerit numerus impar, posterius si sit nume-

rus

L I B. II. rus par. Hoc ergo modo judicandum erit de quovis ramo per punctum M transeunte seorsim, cum reperta fuerit ejus Tangens, ejusque Tangens discrepet a Tangentibus reliquorum ramorum sese in eodem puncto M interfecantium.

325. Aliud autem judicium erit ferendum, si duorum plurimve ramorum Tangentes in puncto M coincidunt. Sint enim, evanescentibus A & B in æquatione $0 = Ctt + Dtu + Euu + Ft^3 + Gt^2u + \&c.$, primi membri $Ctt + Dtu + Euu$, ambo Factores simplices æquales, seu ambo rami se in puncto M decussantes communem habeant Tangentem. Sit ergo $Ctt + Dtu + Euu = (mt + nu)^2$, atque æquatione ad Coordinatas $Mr = r$, & $rm = s$ translata, ponendo $t =$

T A B.
X V.
Fig. 55.

$\frac{-mr + ns}{\sqrt{(m^2 + n^2)}} \& u = \frac{-ms - nr}{\sqrt{(m^2 + n^2)}}$; hujusmodi prodibit æquatio $rr = arss + \zeta s^3 + \gamma rs^3 + \delta s^4 + \epsilon rs^4 + \zeta s^5 + \&c.$: termini enim, in quibus r habet duas pluresve dimensiones præ primo rr evanescent.

326. Hic primum spectandus est terminus ζs^3 , qui si adfuerit, præ eo reliqui omnes evanescent, propterea quod r infinities minus est quam s . Nisi ergo fuerit $\zeta = 0$, natura Curvæ circa M exprimeretur hac æquatione $rr = \zeta s^3$; ex qua, cum sit $r = s\sqrt{\zeta s} = ss\sqrt{\frac{\zeta}{s}}$, intelligitur radium osculi in

M esse $= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{s}{\zeta}}$; seu, ob s evanescens in M , radium osculi quoque fieri $= 0$. Erit ergo curvatura in M infinite magna seu Elementum Curvæ in M erit portio Circuli infinite parvi. Quoniam porro Applicata s eundem obtinet valorem, sive Abscissa r sumatur affirmativa sive negativa, patet Curvam in M habere Cuspidem, atque in duos ramos Mm , $M\mu$ divaricari se mutuo in M contingentes atque Tangenti Mt convexitatem obvertentes.

T A B.
X V I.
Fig. 63.

327. Sit $\zeta = 0$; adfit autem terminus δs^4 , præ quo γrs^3 evanescit, atque natura Curvæ circa M exprimeretur æquatione $rr = arss + \delta s^4$; quæ, si fuerit α minor quam -4δ , ob Factores

ctores imaginarios, punctum conjugatum in M indicat; sin autem $\alpha\alpha$ major quam -4δ , tum in duas æquationes hujusmodi $r = fss$ & $r = gss$ dispescitur. Quare in M duo Curvæ rami se mutuo contingent, quorum alterius in M radius osculi est $= \frac{1}{2f}$, alterius $= \frac{1}{2g}$. Si ergo hi duo rami concavitate in eandem plagam vertant, figura erit duorum Arcuum circularium se intus Tangentium; sin autem concavitates in plagas opositas dirigantur, figura erit duorum Arcuum circularium se extus Tangentium.

CAP.
XIV.TAB.
XVI.
Fig. 64.
Fig. 65.

328. Sin etiam δ evanescat, tum æquatio vel in duas æquationes erit resolubilis, vel secus, priori casu duo oriuntur rami se in puncto M tangentés, quorum utriusque natura exprimetur hujusmodi æquatione $r = \alpha s^m$; prodibunt ergo tot diversæ figuræ, quot dantur combinationes binorum ramorum, qui in M punctum simplex constituunt, quos vocemus *ramos primi ordinis*, qui omnes in æquatione $r = \alpha s^m$, continentur. Posteriori autem casu quo æquatio in duas alias se resolvit non patitur, natura Curvæ exprimetur æquatione vel $rr = \alpha s^5$, vel $rr = \alpha s^7$, vel $rr = \alpha s^9$, &c.; quos ramos cum eo, quem supra invenimus $rr = \alpha s^3$, *ramos secundi ordinis* appellabimus, quia vicem tenent duorum ramorum primi ordinis se in M tangentium. Hi autem rami secundi ordinis omnes in M habebunt Cuspide[m], uti præbuit æquatio $rr = \alpha s^3$; hoc tamen discrimine, quod, cum radius osculi in M pro æquatione $rr = \alpha s^3$ esset infinite parvus, idem pro reliquis æquationibus prodeat infinite magnus. Cum enim ex æquatione $rr = \alpha s^5$ sit $r = ss\sqrt{\alpha s}$, erit radius osculi in $M = \frac{1}{2\sqrt{2}s}$, hoc est, ob $s = 0$, infinitus.

TAB.
XVI.
Fig. 63.

329. Si tres Tangentes ramorum se in M decussantium in se invicem incidant; tum vel tres rami primi ordinis se in eodem puncto M contingent, vel in M erit contactus unius

Euleri *Introduct. in Anal. infin. Tom. II.*

Z

rami

LIB. II. rami secundi ordinis cum uno ramo primi ordinis, vel unicus
 ——— per M transibit *ramus tertii ordinis*. Ramorum autem tertii
 ordinis natura exprimitur hujusmodi æquationibus $r^3 = as^4$;
 $r^3 = as^5$; $r^3 = as^7$; $r^3 = as^8$; &c., seu hac generali $r^3 =$
 as^n , existente n numero quocunque integro ternario majore
 neque per ternarium divisibili. Horum ramorum autem fi-
 gura ita erit comparata, ut in M sit punctum flexus contra-
 rii, si n fuerit numerus impar; flexus vero non contrarius seu
 continuus (ut in *Figura 62.*) adsit, si n fuerit numerus par.
 TAB. XVI. Ceterum in his Curvis radius osculi in M erit infinite parvus
 si n minor quam 6, at infinite magnus sit n major quam 6.

330. Simili modo si quatuor Tangentes ramorum se in M
 decussantium congruant, tum vel quatuor rami primi ordinis,
 vel duo primi & unus secundi, vel duo rami secundi ordinis,
 vel unus primi & unus tertii ordinis se in eodem puncto M
 contingunt, vel denique unicus *ramus quarti ordinis* per M
 transibit. Ramorum autem quarti ordinis natura continetur
 hac æquatione generali $r^4 = as^n$, existente n numero integro

TAB. XVI. impari majore quam 4. Hæ autem æquationes omnes præ-
 bent Cuspide[m], uti rami secundi ordinis. At in M erit ra-
 dius osculi infinite parvus si n minor quam 8, infinite magnus
 autem si n major quam 8.
 Fig. 63.

331. Eodem modo ramorum *quinti* superiorumve ordinum
 naturæ evolvetur; ratione figuræ autem rami quinti, septimi,
 noni, omniumque imparium ordinum conveniunt cum ramis
 primi ordinis, quorum duplex est figura, vel cum puncto fle-
 xus contrarii, vel sine eo. Rami autem sexti, octavi, & om-
 nium parium ordinum conveniunt ratione figuræ cum ramis
 secundi & quarti ordinis, omnes scilicet habebunt Cuspide[m]
 in M uti *Figura 63.* exhibet. Quod autem ad radium osculi
 attinet, quoniam horum Arcuum natura exprimitur hac æqua-
 tione $r^m = as^n$, existente n numero majore quam m ; per-
 spicuum

spicuum est, si fuerit n minor quam $2m$, radium osculi fore infinite parvum; contra vero, si n major quam $2m$, infinite magnum.

332. Phænomena ergo, quæ in omni Curva conspectui se offerunt, ad tria genera reducuntur. Primo scilicet Curva *continua curvatura* progreditur, neque usquam punctum flexus contrarii habet, neque Cuspitem seu punctum reflexionis. Evenit hoc primum si radius osculi ubique fuerit finitæ magnitudinis, tum vero etiam dantur casus quibus radii osculi magnitudo sive infinite magna sive infinite parva continuum tractum non perturbat, quod usu venit si natura Curvæ circa punctum M exprimitur æquatione $a r^m = s^n$, existente m numero impari, at n numero pari majori quam m . Secundum phænomenon est *punctum Flexus contrarii*, quod locum habere nequit nisi radius osculi fuerit vel infinite magnus vel infinite parvus; indicatur autem æquatione $a r^m = s^n$, si uterque exponens m & n fuerit numerus impar, existente semper n majore quam m . Erit enim radius osculi infinite magnus si n major quam $2m$, at infinite parvus si n minor quam $2m$. Tertium phænomenon est *punctum Reflexionis* seu *Cuspis*, ubi duo quasi rami versus se invicem convexi in puncto coeuntes se tangunt atque terminantur; tale punctum monstrat æquatio $a r^m = s^n$, si m fuerit numerus par & n impar. In Cuspide ergo radius osculi semper est vel infinite parvus vel infinite magnus.

333. Quoniam igitur in his tribus generibus omnes Curvarum, ratione tractus continui, varietates continentur, primum intelligitur Curvæ continuæ ramum nunquam ita inflexum dari, ut in C angulum finitum ACB constituat. Deinde, cum in puncto reflexionis ambo rami sibi convexitatem obvertant, ejusmodi punctum reflexionis ACB in C non datur, ubi rami AC & BC in C quidem communem Tangentem habeant, at alterius concavitas alterius convexitatem respiciat; & quoties

TAB.
XVI.
Fig. 66.

TAB.
XVI.
Fig. 67.

LIB. II. hujusmodi reflexio adesse videatur, toties Curva non est completa; & si Curva ad normam æquationis compleatur ac secundum omnes partes exprimatur, orietur figura, qualis in
 TAB. *Figura 64.* exhibetur. Dantur quidem Curvarum describendarum modi, quibus ejusmodi Cuspis *ACB* oritur, quæ propterea ab HOSPITALIO *Cuspis secunda speciei* vocatur. Verum notandum est descriptiones mechanicas non semper totam Curvam, quæ quidem æquatione contineatur, producere, sed sæpenumero certam tantum partem exhibere, qua sola notatione lis, quæ circa hanc Cuspidem secundæ speciei est mota, dirimitur.

Non obstantibus his argumentis, quibus existentia hujusmodi Cuspidis secundæ speciei everti videtur, innumerabiles dantur Curvæ algebraicæ tali Cuspide præditæ. Inter quas adeo una ex ordine Linearum quarto, hac æquatione contenta $y^4 - 2y^2x - 4yx^2 - x^3 = 0$, quæ ex ista formula $y = \sqrt{x} \pm \sqrt[4]{x^3}$ resultat. Quanquam enim hic primum occurrit terminus \sqrt{x} , tamen ejus signum non est ambiguum, sed necessario debet esse +. Nam, si ipsi tribueretur signum negationis, alter terminus $\sqrt[4]{x^3} = \sqrt{(x\sqrt{x})}$ evaderet imaginarius. Ex quo exemplo quemadmodum exempla supra allata restringi oporteat luculenter perspicitur.

TAB. 334. Si duo rami, qui in *M* communem habent Tangentem, ideoque quatuor Arcus ex *M* exeuntes repræsentant
 XVI. nempe *Mm*, *Mμ*, *Mn*, *Mν*, diversis æquationibus exprimantur, dubium est nullum, quinam horum Arcuum sint continui; ii scilicet, qui sub eadem æquatione continentur; eritque Arcus *Mm* continuatio Arcus *Mn*, & *Mμ*, continuatio Arcus *νM*. Quod si vero ambo rami illi eadem æquatione exprimantur, tum ob cessantem rationem priorem, Arcus *Mm* æque haberi potest pro continuatione Arcus *νM*, atque Arcus *νM*. Cum autem uterque Arcus *Mn* & *Mν* æque haberi possit pro continuatione Arcus *Mm*, etiam alter pro alterius continuatione haberi poterit. Hinc Arcus *mM*,
 Fig. 64. &

& $M\mu$ Curvam continuam constituere censendi sunt, æque ac bini Arcus quicunque alii, sicque hoc casu in M se respicient duæ Cuspides secundæ speciei, $mM\mu$ & $nN\nu$.


335. Neque vero solum valet de duobus ramis qui sine Flexu contrario ac sine Cuspide se mutuo in M tangunt atque eadem æquatione exprimuntur, sed etiam eadem erit continuitatis ratio, cujuscumque generis fuerint ambo illi rami se mutuo in M tangentes, dummodo communi æquatione exprimantur. Evenit hoc quoties inter r & s ad hujusmodi pervenitur æquationem $a^2 r^{2m} - 2a\epsilon r^m s^n + \epsilon\epsilon s^{2n} = 0$; tum enim uterque ramus eadem æquatione $ar^m = \epsilon s^n$ exprimitur.

Hoc igitur casu quatuor Arcuum ex puncto M exeuntium duo quicunque pro una Linea continua haberi possunt, hincque nascentur innumerabiles Cuspides secundæ speciei. Hæc autem ipsa continuitatis ratio in causa est, quod quædam descriptiones ac constructiones mechanicæ nonnumquam Cuspides secundæ speciei producant; hoc tamen evenire non potest, nisi quando descriptio non totam Curvam in æquatione contentam, sed ejus tantum ramum unum vel aliquot exhibet.

C A P U T X V.

De Curvis una pluribusve Diametris præditis.

336. **D**E Lineis secundi ordinis supra vidimus, eas omnes unam ad minimum habere Diametrum orthogonalem, quæ totam Curvam in duas partes similes & æquales secet. Parabola scilicet ejusmodi unam habet Diametrum; ac propterea duabus constat partibus æqualibus & similibus. Ellipsis autem atque Hyperbola duas ejusmodi habent Diametros se mutuo in Centro normaliter decussantes; ideoque in iis quatuor dantur Arcus seu rami inter se æquales & similes.

LIB. II.  Circulus vero, quia ab omni recta per Centrum ducta in duas partes similes & æquales dividitur, innumeras habebit partes æquales, omnes scilicet Arcus, qui æqualibus chordis subtenduntur, simul inter se sunt æquales & similes.

337. Hanc igitur duarum pluriumve partium ejusdem Curvæ similitudinem hic data opera perpendemus; easque Curvas, quarum duæ pluresve partes inter se sunt similes, ad æquationes generales revocabimus. Ac primo quidem, si consideremus æquationem inter Coordinatas orthogonales x & y , diviso universo spatio in quatuor regiones litteris Q, R, S, T indicatas per rectas AB , EF , se mutuo in C normaliter secantes, sumtis x & y affirmativis, portio Curvæ in regione Q sita oritur; sumta autem Abscissa x affirmativa, at Applicata y negativa, portio Curvæ in regione R sita oritur: sin autem x negativa ponatur, manente y affirmativa, portio Curvæ in regione S sita prodibit; portio denique in regione T sita invenitur, posita utraque Coordinata y & x negativa.

T A B.
XVII.
Fig. 68.

338. Portiones ergo in regionibus Q & R sitæ inter se erunt æquales & similes, si æquatio ita fuerit comparata, ut non mutetur etiamsi $-y$ loco y scribatur. Cum igitur omnis potestas parium exponentium ipsius y hac gaudeat proprietate; patet, si in æquatione pro Curva nullæ potestates impares ipsius y occurrant, Curvæ portiones in regionibus Q & R sitas inter se fore æquales & similes; ideoque rectam AB in qua Abscissæ $CP = x$ capiuntur, fore Curvæ Diametrum. Hujusmodi ergo Curvæ, si quidem fuerint algebraicæ, omnes in hac æquatione generali continebuntur

$$0 = a + \epsilon x + \gamma x^2 + \delta y + \epsilon x^3 + \zeta xy + \eta x^4 + \theta x^2 y^2 + \nu^4 \&c.$$

quæ expressio ita describi potest ut sit Functio rationalis ipsarum x & yy . Quod si ergo Z fuerit Functio quæcunque rationalis ipsarum x & yy , tum æquatio $Z = 0$, exprimet Lineam curvam, quæ a recta AB in duas partes similes & æquales

æquales bifecabitur; erunt ergo quoque portiones in regionibus S & T sitæ inter se æquales & similes.

339. Portiones vero in regionibus Q & S erunt æquales & similes, si æquatio ita fuerit comparata, ut posito — x loco x non immutetur: quare, si Z fuerit Functio quæcunque rationalis ipsarum xx & y , tum æquatio $Z = 0$, exprimet Curvam, quæ per rectam EF in duas partes similes & æquales bifecabitur. Æquatio ergo pro his Curvis erit hujusmodi

$$0 = a + Cy + \gamma xx + \delta yy + \epsilon xy + \zeta y^3 + \eta x^4 + \theta xyy + \iota y^4 + \&c.$$

Per hanc ergo æquationem portio Curvæ in S sita similis & æqualis erit portioni in Q, similique modo portio in T portioni in R.

340. Portiones autem in regionibus oppositis Q & T, seu R & S erunt similes & æquales, si æquatio inter Coordinatas x & y ita fuerit comparata, ut, posita utraque x & y negativa, nullam mutationem subeat. Sit $Z = 0$ æquatio pro his Curvis, ac primo patet, si Z fuerit Functio ipsarum x & y , parium dimensionum, seu, si fuerit aggregatum ex quocunque Functionibus homogeneis parium dimensionum, tum æquationem $Z = 0$ præscripta gaudere proprietate. Tum vero si Z fuerit aggregatum quocunque Functionum homogenearum imparium dimensionum, sumtis x & y negativis, Z abibit in — Z; ideoque, cum esset $Z = 0$, erit quoque — $Z = 0$. Hinc ergo duplex nascitur æquatio generalis pro Curvis, quæ in regionibus oppositis Q & T itemque in R & S portiones habent æquales & similes, altera scilicet erit

$$0 = a + \epsilon xx + \gamma xy + \delta y^2 + \epsilon x^4 + \zeta x^3 y + \eta xxy + \theta xy^3 + \iota y^4 + \kappa x^6 + \&c.$$

altera vero erit

$$0 = ax + Cy + \gamma x^3 + \delta x^2 y + \epsilon xy^2 + \zeta y^3 + \eta x^5 + \theta x^4 y + \iota x^3 y^2 + \&c.$$

341. Curvæ ergo, quæ duas habent partes similes & æquales, duplicis sunt generis: vel enim hæ duæ partes utrinque circa Lineam rectam ita sunt dispositæ, ut omnes Ordinatæ ortho-

LIB. II. orthogonales ad illam rectam simul bifariam secantur, quo casu illa recta *Diameter Curvæ orthogonalis* appellatur, quorsum pertinent æquationes §. §. 337. & 338. traditæ. Vel binæ illæ partes similes & æquales in regiones oppositas Q & R seu T & S cadunt, ita ut omnis recta per punctum C ducta Curvam dividat in duas partes alternatim æquales, cujusmodi Curvæ continentur in æquationibus in paragrapho præcedente exhibitis. Hanc igitur partium æqualium diversam positionem ita describemus, ut cas, quæ ad priorem speciem pertinent, *diametraliter æquales*; quæ vero ad posteriorem, *alternatim æquales* appellemus. Quia vero in posteriore specie datur punctum C, per quod omnis recta utrinque ad Curvam producta simul bifecatur, hoc punctum *Centri* nomine appellari convenit, ita ut Curvæ binas partes alternatim æquales habentes Centro præditæ dicantur; illæ vero Curvæ, quæ duas partes diametraliter æquales habent, *Diametro* præditæ vocentur.

342. Cum æquatio $Z = 0$, præbeat Curvas, quarum *Diameter* est recta AB , si *Coordinata* y pares tantum obtineat dimensiones in *Functione* Z ; atque eadem æquatio $Z = 0$, rectam EF Curvæ *Diametrum* indicet, si altera *Coordinata* x ubique pares habeat exponentes, sequitur, si Z ejusmodi fuerit *Functio* ipsarum x & y ut omnes exponentes tam ipsius x quam ipsius y sint numeri pares, tum utramque rectam AB & EF fore Curvæ *Diametrum* orthogonalem; ideoque quatuor partes in regionibus Q, R, S & T sitas inter se fore æquales & similes. Hujusmodi ergo Curvæ omnes in hac generali æquatione continebuntur.

$$0 = a + cx^2 + cy^2 + dx^4 + ex^2y^2 + \zeta y^4 + \eta x^6 + \theta x^4y^2 + \&c.$$

343. Curvæ ergo in hac æquatione contentæ duas habebunt *Diametros* orthogonales AB & EF se mutuo in C normaliter interfecantes. Pertinent ergo hæ Curvæ omnes ad *Linearum* ordines vel secundum, vel quartum, vel sextum, &c., ita ut in nullo *Linearum* ordine impari ulla contineatur *Linea* curva duabus *Diametris* se mutuo normaliter interfecantibus prædita.

prædita. Deinde, quia ista æquatio quoque continetur in æquatione priori, §. 339., hæ Curvæ simul Centrum habebunt in puncto C , ita ut omnis recta per id utrinque ad Curvam producta, in eo simul bifariam secetur. Hujusmodi igitur Curvas duplici Diametro gaudentes præbebit æquatio $Z=0$, si quidem fuerit Z Functio quæcunque rationalis ipsarum x & yy .

344. Quia igitur hoc modo deducti sumus ad Lineas curvas duabus Diametris præditas, inquiremus in æquationes pro Lineis curvis, quæ plures habeant Diametros. Ac primo quidem facile ostendetur, si quæpiam Curva duas tantum habeat Diametros, eas inter se normales esse oportere, ita ut nulla Curva duabus Diametris tantum prædita detur, quæ non in æquatione modo inventa contineatur. Ponamus enim cujuspiam Linæ curvæ duas esse Diametros AB , & EF sese in C non normaliter decussantes. Cum igitur EC sit Diameter, Curva utrinque circa eam æqualiter erit comparata: quare, cum ejus pars citerior rectam AC pro Diametro habeat, etiam pars ulterior Diametrum habebit GC , in eodem puncto C cum EC angulum $GCE = ACE$ constituentem. Simili modo, cum GC sit Diameter, debebit quoque recta IC , existente $GCI = GCE$, esse Diameter ejusdem indolis, cujus est EC . Porro Diameter quoque erit recta LC , sumto angulo $ICL = ICG$; sicque progrediendo, continuo novæ Diametri reperientur donec in primam AC recidant; quod evenit, si angulus ACE ad angulum rectum habeat rationem rationalem.

TAB.
XVII.
Fig. 69.

345. Nisi ergo angulus ACE ad angulum rectum habeat rationem rationalem, numerus Diametrorum erit infinitus, quo casu Curva erit Circulus; quippe in quo omnis recta per Centrum ducta est Diameter orthogonalis: hic enim Diametri nomen ad solas Diametros orthogonales restringimus, quia his solis Curvæ in duas partes similes & æquales dividuntur. Ex his intelligitur nullam Curvam algebraicam duas habere posse Diametros inter se parallelas: ob rationes enim allegatas, si duas haberent Diametros parallelas, simul infinitas inter

L1B. II. se parallelas & æqualiter distantes habere deberent; ideoque
 ——— Linea recta hujusmodi Curvam in infinitis punctis secare possit:
 quæ proprietas in Lineas curvas algebraicas non cadit.

346. Quod si ergo quæpiam Linea curva plures habeat
 Diametros, eæ omnes se mutuo in eodem puncto C interse-
 cabunt, atque a se invicem sub æqualibus angulis distabunt.
 Erunt vero hæ Diametri duplicis generis alternatim progred-
 dientes; Diameter enim CG ejusdem erit indolis, cujus est
 Diameter CA ; atque æquatio pro Curva, sumta Diametro
 CG pro Axe, conveniet cum æquatione pro Curva, sumta
 Diametro CA pro Axe: Diametri ergo alternæ CA , CG ,
 CL &c., æqualiter ad Curvam erunt affectæ, similique modo
 Diametri CE , CI &c. eadem ratione ad Curvam pertine-
 bunt. Quam ob rem, si numerus Diametrorum fuerit fini-
 tus, tum angulus ACG erit pars aliquota quatuor rectorum,
 seu angulus ACE erit pars aliquota anguli 180 graduum, seu
 semiperipheriæ, quam vocemus $= \pi$.

TAB.
 XVII.
 Fig. 70.

347. Si fuerit angulus $ACE = 90^\circ = \frac{1}{2} \pi$, casus existit jam
 supra tractatus, quo Curva duas habet Diametros inter se
 normales. Hujusmodi ergo Curvas denuo investigemus, at
 methodo diversa a priori, quæ æque ad inventionem plurium
 Diametrorum accommodari queat. Sit igitur Curva duabus
 Diametris AB , & EF prædita; sumatur in ea quodcunque
 punctum M , & ducta ex Centro C recta CM , ponatur
 $CM = z$, & angulus $ACM = s$; quæraturque æquatio
 inter z & s . Ac primo quidem intelligitur, quia recta AC est
 Diameter, z esse debere ejusmodi Functionem ipsius s , quæ
 maneat eadem, etiamsi — s loco s ponatur; sumto enim an-
 gulo $ACM = s$ negativo ACm , recta Cm debet esse
 CM . Verum $\cos s$ est ejusmodi Functio ipsius s , quæ manet
 eadem posito — s loco $+s$, quam ob rem huic requisito sa-
 tisfiet si fuerit z Functio quæcunque rationalis ipsius $\cos s$.

348. Ponatur Abscissa $CP = x$, Applicata $PM = y$,
 crit

erit $z = \sqrt{(xx + yy)}$ & $\text{cos}.s = \frac{x}{z}$; sitque $Z = 0$, æquatio pro Curva, cujus recta CA sit Diameter; atque esse debet Z Functio rationalis ipsarum z & $\frac{x}{z}$, vel ipsarum z & x , vel, ob rationalitatem, ipsarum $xx + yy$ & x . At si Z fuerit Functio ipsarum $xx + yy$ & x , erit quoque Functio ipsarum yy & x . Sit enim $xx + yy = u$; quia Z debet esse Functio ipsarum x & u , posito $u = t + xx$, ut sit $t = yy$, fiet Z Functio ipsarum t & x , hoc est ipsarum yy & x . Quoties ergo Z fuerit Functio rationalis ipsarum yy & x , toties recta CA Curvæ erit Diameter: quæ est eadem proprietas Curvarum una Diametro gaudentium, quam supra invenimus.

349. At Curvam quæsitam duabus Diametris AB & EF præditam esse oportet; unde CB erit Diameter ejusdem indolis, ac CA . Quare, si recta $CM = z$, ad Diametrum CB referatur, ob angulum $BCM = \pi - s$, necesse est ut z ejusmodi sit Functio ipsius s , quæ non varietur, etiamsi loco s ponatur $\pi - s$. Hujusmodi Functio videm foret $\sin.s$, est $\sin.s = \sin.(\pi - s)$: sed hoc modo præcedenti conditioni non satisficit. Hinc ejusmodi expressio inveniri debet, quæ ad angulos s , $-s$, & $\pi - s$ æqualiter pertineat; talis est $\text{cos}.2s$, est enim $\text{cos}.2s = \text{cos}. -2s = \text{cos}.2(\pi - s)$. Quocirca æquatio $Z = 0$, erit pro Curva duabus Diametris AB & EF prædita, si Z fuerit Functio rationalis ipsarum z & $\text{cos}.2s$. Est vero $\text{cos}.2s = \frac{xx - yy}{zz}$. Ex quo Z debet esse Functio ipsarum $xx + yy$, & $xx - yy$, vel ipsarum xx & yy , uti supra invenimus.

350. Progrediamur ad Curvas tribus Diametris AB , EF & GH præditas investigandas; quæ Diametri in eodem puncto C ad angulos ACE , ECG , $GCB = 60^\circ = \frac{1}{3}\pi$ se mutuo secabunt, atque Diametri alternæ CA , CG , CF ejusdem erunt indolis. Quare, si ponatur $CM = z$, & angulus

TAB.
XVII.
Fig. 71.

L1B. II. lus $ACM = s$, ob $GCM = \frac{2}{3}\pi - s$, æquatio pro Curva $Z = 0$, ita debet esse comparata, ut Z sit Functio rationalis ipsius z , & quantitatis cujuscumque w , quæ ab s ita pendeat, ut maneat eadem, sive loco s ponatur $-s$, sive $\frac{2}{3}\pi - s$. Erit ergo $w = \cos.3s$; est enim $\cos.3s = \cos.-3s = \cos.(2\pi - 3s)$. At, positis Coordinatis $CP = x$, $PM = y$, erit $\cos.3s = \frac{x^3 - 3xyy}{z^3}$, ideoque Z esse debet Functio rationalis ipsarum $xx + yy$ & $x^3 - 3xyy$.

351. Quod si ergo ponatur $xx + yy = t$ & $x^3 - 3xyy = u$, hæc erit æquatio generalis pro Curvis tribus Diametris præditis

$$0 = a + \mathcal{C}t + \gamma u + \delta t^2 + \epsilon t u + \zeta u^2 + \eta^3 + \&c.,$$

quæ præbet hanc inter x & y

$$0 = a + \mathcal{C}(xx + yy) + \gamma x(xx - 3yy) + \delta (xx + yy)^2 + \&c.$$

Cum igitur æquatio $0 = a + \mathcal{C}xx + \mathcal{C}yy$ sit pro Circulo, qui, habens infinitas Diametros, etiam quæstioni de tribus Diametris satisfacit; simplicissima Curva tres habens Diametros erit Linea tertii ordinis hac æquatione expressa $x^3 - 3xyy = axx + ayy + b^3$, quæ tres habet Asymptotas triangulum æquilaterum comprehendentes, in cujus medio existit punctum C ; & singulæ Asymptotæ sunt speciei $u = \frac{A}{t^{\frac{1}{2}}}$. Pertinent ergo hæ Curvæ ad Speciem quintam secundum enumerationem a nobis supra factam.

T A B. XVIII. 352. Si Curva habeat quatuor Diametros AB , EF , GH & IK se mutuo in puncto C ad angulos semirectos $= \frac{1}{4}\pi$ interfecantes, tum Diametri CA , CG , CB , & CH ejusdem erunt naturæ. Quare, posita $CM = z$, & angulo $ACM = s$, quæri debet Functio quædam ipsius s , quæ non mutetur

mutetur sine loco s ponatur $-s$ five $\frac{2}{4} \pi - s$. Talis autem Functio est $\cos.4s$. Quare, si Z fuerit Functio ipsarum z & $\cos.4s$; seu, quod eodem redit, ipsarum $xx + yy$ & $x^4 - 6xxyy + y^4$, tum æquatio $Z = 0$, dabit Curvam quatuor Diametris præditam. Erit ergo Z Functio ipsarum t & u , positus $t = xx + yy$ & $u = x^4 - 6xxyy + y^4$; Ponatur autem $v = tt - uu$, eritque Z Functio ipsarum t & v , hoc est ipsarum $xx + yy$ & $xxyy$. Vel etiam Z ita definiri potest ut sit Functio harum duarum quantitatum $xx + yy$ & $x^4 + y^4$.

353. Ut Curva æquatione $Z = 0$, expressa habeat quinque Diametros, oportet ut Z sit Functio ipsarum z & $\cos.5s$. Quare, sumtis Coordinatis orthogonalibus x & y , ob $\cos.5s = \frac{x^5 - 10x^3yy + 5xy^4}{z^5}$, debet esse Z Functio rationalis harum

expressionum $xx + yy$ & $x^5 - 10x^3yy + 5xy^4$. Curva igitur simplicissima, quæ, præter Circulum, quinque habeat Diametros, est Linea quinti ordinis, atque hac æquatione exprimitur $x^5 - 10x^3yy + 5xy^4 = a(xx + yy)^2 + b(xx + yy) + c$. Hæc ergo Curva, propter omnes Factores supremi membri reales, habebit quinque Asymptotas suis intersectionibus pentagonum regulare, in cuius medio sit Centrum C , formantes.

354. Ex his jam generaliter patet, Curvam æquatione $Z = 0$, expressam, habituram esse n Diametros, quarum binæ proxime angulum $= \frac{\pi}{n}$ comprehendant, si fuerit Z Functio ipsarum z & $\cos. ns$, seu inter Coordinatas orthogonales, Functio quæcunque rationalis harum expressionum $xx + yy$ & $x^n - \frac{n(n-1)}{1.2} x^{n-2} y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} x^{n-4} y^4 - \dots$ &c. Seu æquatio hæc

$$0 = a + Cz + yu + dit + etu + \zeta uu + \eta^3 + \theta tu + \&c.$$

præbebit Curvam n Diametris præditam, si ponatur $t = xx + yy$

LIB. II.
$$\& u = x^n - \frac{n(n-1)}{1.2} x^{n-2} y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} x^{n-4} y^4 - \&c.$$

Hinc ergo Curvæ inveniri possunt, quæ tot, quot lubuerit, habeant Diametros se mutuo in angulis æqualibus in eodem puncto *C* interfecantes. Simul vero hæ æquationes in se complectuntur omnes omnino Curvas algebraïcas, quæ dato Diametrorum numero sint præditæ.

T A B. 355. Hujusmodi Curvæ pluribus Diametris præditæ duplo
XVII. plures habent partes inter se similes & æquales. Sic Curva
Fig. 70. duabus Diametris prædita quatuor habet partes similes & æquales, *AE*, *BE*, *AF* & *BF*. Curva autem tribus Diametris prædita habet sex partes similes & æquales *AE*, *GE*, *GB*, *FB*, *FH* & *AH*. Atque Curva quatuor Diametris prædita octo habet partes similes & æquales *AE*, *AK*, *GE*, *GI*, *BI*, *BF*, *HF*, & *HK*; similique modo numerus partium æqualium semper duplo major est quam numerus Diametrorum. Quemadmodum autem supra vidimus dari Curvas, duas partes similes habentes, quæ tamen Diametro careant, ita dabuntur quoque Curvæ plures partes similes & æquales habentes, quæ tamen Diametris destituantur.

T A B. 356. Incipiamus a duabus partibus æqualibus sibi e regione
XVIII. oppositis *AME*, *BKF*, quem quidem casum supra jam tractavimus. Quod si enim Curva duas tantum habere debeat partes æquales, necessario sibi oppositæ esse debent, quod clarius patebit, quando plures partes æquales contemplabimur. Ponamus ergo, ut ante, *CM* = *z*, & angulum *ACM* = *s*, ac manifestum est angulis *s* & $\pi + s$ eundem valorem ipsius *z* convenire oportere; sumto enim angulo *ACM* = $\pi + s$, fiet *z* = *CK*: at esse debet *CK* = *CM*; quærenda ergo est expressio communis angulis *s* & $\pi + s$, cujusmodi est *tang. s*; est enim *tang. s* = *tang. (π + s)*. Æquationis igitur *Z* = 0, erit pro tali Curva, qualem quærimus, si fuerit *Z* Functio ipsarum *z* & *tang. s*, seu Functio ipsarum *xx + yy* & $\frac{x}{y}$. Ponamus $\frac{x}{y} = t$, eritque *xx + yy* = *yy* (1 + *tt*).

T A B. 357. Incipiamus a duabus partibus æqualibus sibi e regione
XVIII. oppositis *AME*, *BKF*, quem quidem casum supra jam tractavimus. Quod si enim Curva duas tantum habere debeat partes æquales, necessario sibi oppositæ esse debent, quod clarius patebit, quando plures partes æquales contemplabimur. Ponamus ergo, ut ante, *CM* = *z*, & angulum *ACM* = *s*, ac manifestum est angulis *s* & $\pi + s$ eundem valorem ipsius *z* convenire oportere; sumto enim angulo *ACM* = $\pi + s$, fiet *z* = *CK*: at esse debet *CK* = *CM*; quærenda ergo est expressio communis angulis *s* & $\pi + s$, cujusmodi est *tang. s*; est enim *tang. s* = *tang. (π + s)*. Æquationis igitur *Z* = 0, erit pro tali Curva, qualem quærimus, si fuerit *Z* Functio ipsarum *z* & *tang. s*, seu Functio ipsarum *xx + yy* & $\frac{x}{y}$. Ponamus $\frac{x}{y} = t$, eritque *xx + yy* = *yy* (1 + *tt*).

T A B. 358. Incipiamus a duabus partibus æqualibus sibi e regione
XVIII. oppositis *AME*, *BKF*, quem quidem casum supra jam tractavimus. Quod si enim Curva duas tantum habere debeat partes æquales, necessario sibi oppositæ esse debent, quod clarius patebit, quando plures partes æquales contemplabimur. Ponamus ergo, ut ante, *CM* = *z*, & angulum *ACM* = *s*, ac manifestum est angulis *s* & $\pi + s$ eundem valorem ipsius *z* convenire oportere; sumto enim angulo *ACM* = $\pi + s$, fiet *z* = *CK*: at esse debet *CK* = *CM*; quærenda ergo est expressio communis angulis *s* & $\pi + s$, cujusmodi est *tang. s*; est enim *tang. s* = *tang. (π + s)*. Æquationis igitur *Z* = 0, erit pro tali Curva, qualem quærimus, si fuerit *Z* Functio ipsarum *z* & *tang. s*, seu Functio ipsarum *xx + yy* & $\frac{x}{y}$. Ponamus $\frac{x}{y} = t$, eritque *xx + yy* = *yy* (1 + *tt*).

T A B. 359. Incipiamus a duabus partibus æqualibus sibi e regione
XVIII. oppositis *AME*, *BKF*, quem quidem casum supra jam tractavimus. Quod si enim Curva duas tantum habere debeat partes æquales, necessario sibi oppositæ esse debent, quod clarius patebit, quando plures partes æquales contemplabimur. Ponamus ergo, ut ante, *CM* = *z*, & angulum *ACM* = *s*, ac manifestum est angulis *s* & $\pi + s$ eundem valorem ipsius *z* convenire oportere; sumto enim angulo *ACM* = $\pi + s$, fiet *z* = *CK*: at esse debet *CK* = *CM*; quærenda ergo est expressio communis angulis *s* & $\pi + s$, cujusmodi est *tang. s*; est enim *tang. s* = *tang. (π + s)*. Æquationis igitur *Z* = 0, erit pro tali Curva, qualem quærimus, si fuerit *Z* Functio ipsarum *z* & *tang. s*, seu Functio ipsarum *xx + yy* & $\frac{x}{y}$. Ponamus $\frac{x}{y} = t$, eritque *xx + yy* = *yy* (1 + *tt*).

T A B. 360. Incipiamus a duabus partibus æqualibus sibi e regione
XVIII. oppositis *AME*, *BKF*, quem quidem casum supra jam tractavimus. Quod si enim Curva duas tantum habere debeat partes æquales, necessario sibi oppositæ esse debent, quod clarius patebit, quando plures partes æquales contemplabimur. Ponamus ergo, ut ante, *CM* = *z*, & angulum *ACM* = *s*, ac manifestum est angulis *s* & $\pi + s$ eundem valorem ipsius *z* convenire oportere; sumto enim angulo *ACM* = $\pi + s$, fiet *z* = *CK*: at esse debet *CK* = *CM*; quærenda ergo est expressio communis angulis *s* & $\pi + s$, cujusmodi est *tang. s*; est enim *tang. s* = *tang. (π + s)*. Æquationis igitur *Z* = 0, erit pro tali Curva, qualem quærimus, si fuerit *Z* Functio ipsarum *z* & *tang. s*, seu Functio ipsarum *xx + yy* & $\frac{x}{y}$. Ponamus $\frac{x}{y} = t$, eritque *xx + yy* = *yy* (1 + *tt*).

T A B. 361. Incipiamus a duabus partibus æqualibus sibi e regione
XVIII. oppositis *AME*, *BKF*, quem quidem casum supra jam tractavimus. Quod si enim Curva duas tantum habere debeat partes æquales, necessario sibi oppositæ esse debent, quod clarius patebit, quando plures partes æquales contemplabimur. Ponamus ergo, ut ante, *CM* = *z*, & angulum *ACM* = *s*, ac manifestum est angulis *s* & $\pi + s$ eundem valorem ipsius *z* convenire oportere; sumto enim angulo *ACM* = $\pi + s$, fiet *z* = *CK*: at esse debet *CK* = *CM*; quærenda ergo est expressio communis angulis *s* & $\pi + s$, cujusmodi est *tang. s*; est enim *tang. s* = *tang. (π + s)*. Æquationis igitur *Z* = 0, erit pro tali Curva, qualem quærimus, si fuerit *Z* Functio ipsarum *z* & *tang. s*, seu Functio ipsarum *xx + yy* & $\frac{x}{y}$. Ponamus $\frac{x}{y} = t$, eritque *xx + yy* = *yy* (1 + *tt*).

T A B. 362. Incipiamus a duabus partibus æqualibus sibi e regione
XVIII. oppositis *AME*, *BKF*, quem quidem casum supra jam tractavimus. Quod si enim Curva duas tantum habere debeat partes æquales, necessario sibi oppositæ esse debent, quod clarius patebit, quando plures partes æquales contemplabimur. Ponamus ergo, ut ante, *CM* = *z*, & angulum *ACM* = *s*, ac manifestum est angulis *s* & $\pi + s$ eundem valorem ipsius *z* convenire oportere; sumto enim angulo *ACM* = $\pi + s$, fiet *z* = *CK*: at esse debet *CK* = *CM*; quærenda ergo est expressio communis angulis *s* & $\pi + s$, cujusmodi est *tang. s*; est enim *tang. s* = *tang. (π + s)*. Æquationis igitur *Z* = 0, erit pro tali Curva, qualem quærimus, si fuerit *Z* Functio ipsarum *z* & *tang. s*, seu Functio ipsarum *xx + yy* & $\frac{x}{y}$. Ponamus $\frac{x}{y} = t$, eritque *xx + yy* = *yy* (1 + *tt*).

T A B. 363. Incipiamus a duabus partibus æqualibus sibi e regione
XVIII. oppositis *AME*, *BKF*, quem quidem casum supra jam tractavimus. Quod si enim Curva duas tantum habere debeat partes æquales, necessario sibi oppositæ esse debent, quod clarius patebit, quando plures partes æquales contemplabimur. Ponamus ergo, ut ante, *CM* = *z*, & angulum *ACM* = *s*, ac manifestum est angulis *s* & $\pi + s$ eundem valorem ipsius *z* convenire oportere; sumto enim angulo *ACM* = $\pi + s$, fiet *z* = *CK*: at esse debet *CK* = *CM*; quærenda ergo est expressio communis angulis *s* & $\pi + s$, cujusmodi est *tang. s*; est enim *tang. s* = *tang. (π + s)*. Æquationis igitur *Z* = 0, erit pro tali Curva, qualem quærimus, si fuerit *Z* Functio ipsarum *z* & *tang. s*, seu Functio ipsarum *xx + yy* & $\frac{x}{y}$. Ponamus $\frac{x}{y} = t$, eritque *xx + yy* = *yy* (1 + *tt*).

T A B. 364. Incipiamus a duabus partibus æqualibus sibi e regione
XVIII. oppositis *AME*, *BKF*, quem quidem casum supra jam tractavimus. Quod si enim Curva duas tantum habere debeat partes æquales, necessario sibi oppositæ esse debent, quod clarius patebit, quando plures partes æquales contemplabimur. Ponamus ergo, ut ante, *CM* = *z*, & angulum *ACM* = *s*, ac manifestum est angulis *s* & $\pi + s$ eundem valorem ipsius *z* convenire oportere; sumto enim angulo *ACM* = $\pi + s$, fiet *z* = *CK*: at esse debet *CK* = *CM*; quærenda ergo est expressio communis angulis *s* & $\pi + s$, cujusmodi est *tang. s*; est enim *tang. s* = *tang. (π + s)*. Æquationis igitur *Z* = 0, erit pro tali Curva, qualem quærimus, si fuerit *Z* Functio ipsarum *z* & *tang. s*, seu Functio ipsarum *xx + yy* & $\frac{x}{y}$. Ponamus $\frac{x}{y} = t$, eritque *xx + yy* = *yy* (1 + *tt*).

Quare

Quare Z debebit esse Functio ipsarum t & yy ($1 + tt$), hoc est ipsarum t & yy : unde eadem æquationes resultant, quas supra invenimus.

357. Quo autem fractiones, quibus tangentes laborant, evitemus, idem negotium per sinus & cosinus expedire poterimus. Cum enim sit & $\sin. 2s = \sin. 2(\pi + s)$ & $\cos. 2s = \cos. 2(\pi + s)$, quæsitum obtinebitur si Z capiatur Functio quæcunque rationalis trium harum formularum z , $\sin. 2s$ & $\cos. 2s$, seu ipsarum $xx + yy$, $2xy$, & $xx - yy$. Ubi notandum est, si expressionum $\sin. 2s$ & $\cos. 2s$ altera omittatur, Curvam insuper Diametrum esse habituram. Solutio ergo huc redibit ut Z capiatur Functio ipsarum xx , yy , & xy , rationalis; unde hujusmodi orietur æquatio

$$0 = a + 6xx + 7xy + 8yy + ex^4 + \zeta x^3y + \eta x^2y^2 + \theta xy^3 + \psi^4 + \&c.$$

Atque, si termini, in quibus non inest x , evanescant, tota æquatio dividi poterit per x & prodibit

$$0 = 6x + 7y + ex^3 + \zeta xxy + \eta xy^2 + \theta y^3 + \kappa x^5 + \&c.$$

quæ sunt ambæ illæ æquationes quas supra invenimus.

358. Quærat nunc Curva, quæ tres tantum habeat partes similes & æquales AM , BN , & DL . Hæc ergo ita erit comparata, ut educis ex puncto medio C tribus rectis

TAB.
XVIII.
Fig. 74

CM , CN , & CL in angulis æqualibus, eæ semper inter se futuræ sint æquales. Politis ergo angulo $ACM = s$, & recta $CM = z$; recta z per s ita definietur, ut his tribus angulis s , $\frac{2}{3}\pi + s$, & $\frac{4}{3}\pi + s$ idem valor ipsius z conveniat;

est enim $MCN = NCL = \frac{2}{3}\pi$. Horum autem trium angulorum communes sunt hæc expressiones $\sin. 3s$ & $\cos. 3s$. Quare, si Z fuerit Functio rationalis harum trium quantitatum $xx + yy$; $3xy - y^3$; & $x^3 - 3xyy$, æquatio $Z = 0$, dabit Curvas quæsitæ omnes. Hujusmodi ergo orietur æquatio generalis

$$0 =$$

$$\text{LIB. II. } 0 = \alpha + \epsilon(xx + yy) + \gamma(3xxy - y^3) + \delta(x^3 - 3xyy) + \epsilon(xx + yy)^2 + \\ \zeta(xx + yy)(3xxy - y^3) + \eta(xx + yy)(x^3 - 3xyy) + \&c.$$

Lineæ igitur tertii ordinis hac proprietate præditæ continentur in hac æquatione

$$0 = \alpha + \epsilon xx + \epsilon yy + \delta x^3 + 3\gamma xxy - 3\delta xyy - \gamma y^3$$

TAB. XVIII. 359. Si Curva quatuor habere debeat partes æquales *AM*, *EN*, *BK*, & *FL*, ita ut ex puncto medio *C* eductis quatuor rectis quibus vis *CM*, *CN*, *CK* & *CL*, sub angulis æqualibus, eæ futuræ sint æquales; ponatur angulus *ACM* = *s* & recta *CM* = *z*; atque, ob angulos *MCN* = *NCK* = *KCL* = $90^\circ = \frac{1}{2} \pi$, recta *z* per angulum *s* ita debet exprimi, ut his angulis *s*, $\frac{1}{2} \pi + s$, $\varpi + s$; $\frac{3}{2} \pi + s$ idem respondeat valor. Hanc vero proprietatem habent expressiones *sin. 4s* & *cos. 4s*: quare æquatio *Z* = 0, dabit Curvam quatuor ejusmodi partibus æqualibus præditam, si fuerit *Z* Functio quæcunque rationalis harum trium quantitatum *xx + yy*; $4x^3y - 4xy^3$ & $x^4 - 6xxyy + y^4$. Hinc æquatio generalis pro istiusmodi Curvis erit

$$0 = \alpha + \epsilon xx + \epsilon yy + \gamma x^4 + \delta x^3y + \epsilon xxyy - \delta xy^3 + \gamma y^4 + \&c.$$

360. Simili modo apparet, si quæri debeat Curva Diamentris destituta, quæ tamen quinque habeat partes æquales & similes, in æquatione *Z* = 0, esse debere *Z* Functionem rationalem harum trium quantitatum

$$xx + yy; 5x^4y - 10x^2y^3 + y^5 \text{ \& } x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4;$$

atque, si numerus partium æqualium esse debeat = *n*, tum *Z* esse debet Functio rationalis harum trium $xx + yy$,

$$n x^{n-1} y - \frac{n(n-1)(n-2)}{1. 2. 3} x^{n-3} y^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1. 2. 3. 4. 5} x^{n-5} y^5 - \&c.,$$

CAP.
XV.

&

$$x^n - \frac{n(n-1)}{1. 2} x^{n-2} y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1. 2. 3. 4} x^{n-4} y^4 - \&c..$$

Quod si alterutra posteriorum expressionum non ingrediatur in æquationem, Curva habebit tot Diametros, quot numerus n continet unitates.

361. In duplici hac enumeratione Curvarum aliquot partes æquales habentium, quæ vel Diametris sint præditæ vel iis careant, continentur omnino omnes Curvæ algebraicæ, quæ quidem duas pluresve habeant partes similes & æquales. Quod ut ostendatur, habeat Curva continua duas partes $O A a$, $O B b$ inter se similes & æquales. Jungatur AB , superque ea tanquam basi constituatur triangulum isoscele ACB , cujus angulus C æqualis sit angulo O . Jam, quia anguli OAC & OBC sunt æquales, erunt quoque Curvæ partes $C A a$ & $C B b$ similes & æquales: atque, ob legem continuitatis, si capiantur anguli BCD , DCE , &c., æquales singuli angulo ACB , & $CD = CE = CA = CB$, habebit Curva præterea ad has singulas rectas partes $D d$, $E e$, &c., similes & æquales partibus $A a$, $B b$. Nisi ergo ratio anguli ACB ad 360° fuerit irrationalis, partium æqualium numerus erit finitus, contra autem infinitus, neque adeo in Lineas algebraicas cadens. Semper ergo Curva ista continetur in iis, quas ante investigavimus, Diametris carentes.

TAB.
XVIII.
Fig. 75.

362. Sin autem duæ partes similes & æquales in plagas oppositas rectarum AO & BO cadant, ita ut sit pars $AO a$ similis & æqualis parti $OB b$; tum utrinque ducantur rectæ AR , & BS , ut sit $OAR = OBS, = \frac{1}{2} AOB$; eruntque rectæ AR & BS inter se parallelæ. Jungatur AB , & per punctum medium C agatur ipsis AR & BS parallela CV , erunt partes $a A$, $b B$ respectu rectæ CV similes & æquales. Nisi igitur sit $b a = 0$, quia Arcui $b B$, $a b$ ad a progrediendo, respondet ex altera parte Arcus similis & æqualis $a A$; ita Euleri *Introduct. in Anal. infin. Tom. II.* B b quoque

TAB.
XIX.
Fig. 76.

LIB. II. quoque huic ab a ad e per spatium $ae = ba$ progrediendo, respondebit ex altera parte Arcus similis & æqualis eE , huicque porro Arcus dD , ita ut hæc Curva habitura sit infinitas partes similes & æquales utrinque circa rectam CV dispositas. Hujusmodi ergo Curva algebraïca esse nequit.

363. Hoc ita se habet, si recta AB fuerit obliqua ad parallelas AR & BS , vel (quod eodem redit,) si in triangulo AOB latera AO & BO fuerint inæqualia. Sin autem fuerit $AO = BO$, tum simul recta AB erit perpendicularis ad parallelas AR & BS , & ad CV , quæ simul per O transibit. Hoc ergo casu puncta b & a congruent. Et, quia portiones aA & bB non solum erunt æquales & similes, sed etiam utrinque circa rectam CV æqualiter dispositæ, hæc recta CV erit Curvæ Diameter; qui casus ad priores Curvas expositas Diametro gaudentes pertinent. Quocirca ad casus in hoc Capite expositos referuntur omnes omnino Curvæ algebraïcæ, quæ duas pluresve partes habent similes & æquales.

C A P U T X V I.

De inventione Curvarum ex datis Applicatarum proprietatibus.

364. **S**Int P & Q Functiones quæcunque rationales Abscissæ x , atque natura Curvæ exprimaturs hac æquatione $yy - Py + Q = 0$. Hinc ergo unicuique Abscissæ x vel nulla vel duplex respondebit Applicata; erit autem harum duarum Applicatarum summa $= P$ & productum $= Q$. Si igitur P fuerit quantitas constans, summa binarum Applicatarum singulis Abscissis respondentium erit constans, atque Curva habebit Diametrum; hoc idem autem evenit si fuerit $P = a + nx$; tum enim Linea recta hac æquatione $z = \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} nx$ contenta erit Diameter, in latiore significatione

tione hoc nomine accepto, ita ut obliquitas non excludatur. Sin autem fuerit Q quantitas constans, tum rectangulum binarum Applicatarum erit ubique constans; Axis ergo a Curva nusquam secari poterit. At si sit $Q = a + \epsilon x + \gamma xx$, hæcque expressio duos habeat Factores reales, Axis a Curva in duobus punctis trajicietur, atque Q erit multiplum rectanguli ex partibus Axis, ideoque rectangulum Applicatarum se habebit ad rectangulum partium Axis in constanti ratione.

365. Hæ igitur proprietates, quas supra Sectionibus conicis convenire observavimus, in innumerabiles alias Lineas curvas competunt. Sic, constans magnitudo rectangulorum ex binis Applicatis eidem Abscissæ respondentibus formatorum, qua Hyperbolam ad Asymptotam relatam gaudere vidimus, communis ipsi est cum omnibus Curvis hac æquatione $yy - Py + aa = 0$, contentis. Deinde, sumta recta EF Curvam in duobus punctis E & F secante pro Axe, cum in Sectionibus conicis rectangulum $PM.PN$ ad rectangulum $PE.PF$ constantem habeat rationem, hæc proprietas Sectionibus conicis communis erit cum omnibus Curvis in hac æquatione $yy - Py + ax - nxx = 0$ contentis. Erit autem $PM.PN = PE.PF$ seu $pm.pn = Ep.pF$, si fuerit $yy - Py = ax - xx$. Hæc igitur proprietas, qua Circulum præditum esse ex Elementis constat, non solum ipsi communis est cum infinitis Curvis altiorum ordinum, sed etiam in reliquis Sectiones conicas cadit. Sit enim $P = b + nx$, atque æquatio $yy - nxy + xx = ax + by$, quæ est pro Circulo si $n = 0$, & angulus EPM rectus, complectetur quoque Ellipsin si nn minor quam 4, & Hyperbolam si nn major quam 4, atque Parabolam si $nn = 4$.

TAB.V.
Fig. 19.

366. Hinc concludimus in omni Sectione conica $AEBF$ cujus Axes, seu Diametri principales, sint AB, EF , si binæ ducantur rectæ quæcunque pq & mn , quæ ad Axes principales sub angulo semirecto inclinentur, eas in b se mutuo ita esse secturas, ut sit $mb.nb = pb.qb$. Quod quidem manifestum est ex proprietatibus palmariis: si enim per Centrum

TAB.
XIX.
Fig. 77.

LIB. II. *C* ducantur rectæ *PQ* & *MN* sub angulis semirectis ad Axes principales, erunt inter se æquales, ideoque $MC \cdot NC = PC \cdot QC$; quare, cum omnes rectæ his parallelæ eadem lege se fecent, erit quoque $mb \cdot nb = pb \cdot qb$. Quin etiam hinc intelligitur, si modo rectæ *MN* & *PQ* ita ducantur, ut ad eundem Axem principalem æqualiter inclinentur, seu ut sit $PCA = NCA$, ob $CP = CN$, omnes rectas his parallelas se mutuo ita secare, ut rectangula partium sint æqualia, scilicet ut sit $mb \cdot bn = pb \cdot bq$.

T A B. 367. His præmissis, contemplemur alias quæstiones circa
 XIX. binas Applicatas cuique Abscissæ respondentes ex æquatione
 Fig. 78. $yy - Py + Q = 0$. Sit *AP* Abscissa = *x*, cui respondeant duæ Applicatæ *PM*, *PN*: ac primo quærantur omnes Curvæ hujus indolis ut sit $PM^2 + PN^2$ quantitas constans = *aa*. Cum sit $PM + PN = P$ & $PM \cdot PN = Q$, erit $PM^2 + PN^2 = PP - 2Q$, & quæsitio satisfiet si fuerit $PP - 2Q = aa$ seu $Q = \frac{PP - aa}{2}$; unde, pro Curvis desideratis obtinebitur ista æquatio $yy - Py + \frac{PP - aa}{2} = 0$. Quod si ponatur $P = 2nx$, prodibit Sectio conica proprietate proposita gaudens, $yy - 2nxy + 2nnxx - \frac{1}{2}aa = 0$, quæ æquatio est pro Ellipsi, Abcissis a Centro computatis.

T A B. 368. Hinc sequitur non inelegans Ellipsium proprietates ista.
 XIX. Si circa Ellipseos duas quasvis Diametros conjugatas *AB* &
 Fig. 79. *EF* describatur parallelogrammum *GHIK* cujus latera Ellipsin tangent in punctis *A*, *B*, *E*, *F*, hujus parallelogrammi diagonales *GK* & *HI* omnes chordas *MN* alterutri Diametro *EF* parallelas ita secabunt in *P* & *p*, ut sit quadratorum summa $PM^2 + PN^2$ vel $pM^2 + pN^2$ perpetuo constans nempe æqualis $2CE^2$. Similique modo ducta chorda *RS* Diametro alteri *AB* parallela erit $PR^2 + PS^2 = rR^2 + rS^2 = 2CA^2$. Positis enim $CA = CB = a$, $CE = CF = b$, $CQ = t$, $QM = u$, erit $aaau + bbtt = aabb$. Jam est $a:b = CQ(t):PQ$,

PQ , & CP ad CQ ratione data, puta m ; 1. Quare, posita $CP = x$, $PM = y$, erit $x = mt$ & $y = u + \frac{bt}{a}$, seu

$t = \frac{x}{m}$, & $u = y - \frac{bx}{ma}$, quibus valoribus substitutis oritur ista æquatio $ayy - \frac{2abxy}{m} + \frac{2bbxx}{mm} = aabb$. Sit $\frac{b}{ma} = n$, erit $yy - 2nxy + 2nnxx = bb$, quæ est æquatio ante inventa indicans esse $PM^2 + PN^2$ magnitudinem constantem.

369. Quærantur nunc Curvæ in quibus sit summa cuborum $PM^3 + PN^3$ perpetuo quantitas constans. Cum sit $PM + PN = P$, erit $PM^3 + PN^3 = P^3 - 3PQ$: quare, si ponatur $PM^3 + PN^3 = a^3$, erit $Q = \frac{P^3 - a^3}{3P}$: ideoque pro

TAB.
XIX.
Fig. 78.

his Curvis erit æquatio generalis $yy - Py + \frac{1}{3} P^2 - \frac{a^3}{3P} = 0$, ubi pro P Functionem quamcunque rationalem ipsius x substituere licet. Simplicissima ergo Curva hanc habens proprietatem erit Linea tertii ordinis, quæ, ponendo $P = 3nx$, & $a = 3nb$, hac æquatione exprimeretur

$$xyy - 3nxy + 3nxb^3 = 0,$$

quæ pertinet ad Speciem secundam secundum enumerationem supra factam.

370. Simili modo, si effici debeat ut sit $PM^4 + PN^4$ constans, quia est $PM^4 + PN^4 = P^4 - 4P^2Q + 2QQ$, quantitas Q per P ita determinari debet ut sit $P^4 - 4P^2Q + 2QQ = a^4$ seu $Q = PP + \sqrt{(\frac{1}{2} P^4 + \frac{1}{2} a^4)}$. Quia vero tam P quam Q debent esse Functiones rationales seu uniformes ipsius x , ne y plures quam duos valores pro quavis Abscissa x induere possit, quantitas $\sqrt{(\frac{1}{2} P^4 + \frac{1}{2} a^4)}$ deberet esse rationalis; quod cum fieri nequeat, Functio Q semper erit biformis, ideoque Applicatam y reddet Functionem quadriformem.

LIB. II. driformem. Verum ex æquatione $yy - Py + Q = 0$, elicitur
 $y = \frac{1}{2} P \pm \sqrt{\left(-\frac{3}{4} PP \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} P^2 + \frac{1}{2} a^4\right)}\right)}$, unde
 patet Applicatam y realem esse non posse nisi $\sqrt{\left(\frac{1}{2} P^2 + \frac{1}{2} a^4\right)}$ affirmative sumatur; quare, non obstante Functionis Q biformitate, Applicata y nunquam plures duobus valores habebit, quorum biquadratorum summa erit constans, sicut natura quæstionis requirit.

371. Quod si porro ejusmodi requiratur Curva, ut binorum ipsius y valorum cuique Abscissæ x respondentium potestates quintæ summam constantem constituent, seu ut sit $PM^5 + PN^5 = a^5$, debet esse $P^5 - 5P^3Q + 5PQ^2 = a^5$. Cum igitur ex æquatione pro Curva $yy - Py + Q = 0$, sit $Q = -yy + Py$, erit $P^5 - 5P^4y + 10P^3yy - 10P^2y^3 + 5Py^4 = a^5$, seu $(P - y)^5 + y^5 = a^5$. Eodem modo reperietur, si debeat esse $PM^6 + PN^6 = a^6$ hæc æquatio $(P - y)^6 + y^6 = a^6$. Atque generaliter si quærat Curva in qua sit $PM^n + PN^n = a^n$, obtinebitur ista æquatio $(P - y)^n + y^n = a^n$: ubi pro P Functio quæcunque uniformis ipsius x pro lubitu accipi potest. Ratio autem hujus æquationis in promptu est: cum enim summa ambarum Applicatarum sit $= P$, si altera sit y , altera erit $= P - y$, unde statim fit $(P - y)^n + y^n = a^n$.

372. Quod si autem loco Q eliminetur P , ponendo in æquationibus, quibus relatio inter P & Q continetur, $P = \frac{yy + Q}{y}$, oriatur pro $PM^n + PN^n = a^n$ hæc æquatio $y^n + \frac{Q^n}{y^n} = a^n$. Cum enim Applicatarum productum sit $= Q$, si una ponatur $= y$, erit altera $= \frac{Q}{y}$: unde æquatio in-

venta statim fuit. Pro Curvis ergo, in quibus fit $PM^n + PN^n = a^n$, duas nacti sumus æquationes generales, alteram

$(P - y)^n + y^n = a^n$, alteram $y^n + \frac{Q^n}{y^n} = a^n$: ex quarum

posteriori emergit $y^{2n} = a^n y^n - Q^n$, & $y^n = \frac{1}{2} a^n \pm$

$\sqrt{\left(\frac{1}{4} a^{2n} - Q^n\right)}$, ita ut fit $y = \sqrt[n]{\left(\frac{1}{2} a^n \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4} a^{2n} - Q^n\right)}\right)}$, quæ est Functio tantum biformis, atque pro quavis

Abscissa plures duabus Applicatas non exhibet, dummodo Q^n fuerit Functio rationalis seu uniformis, ipsius x . Prior autem æquatio $y^n + (P - y)^n = a^n$ hac gaudet prærogativa ut numerus dimensionum fit minor.

373. Neque vero hæ æquationes solum quæstionem solvunt si n sit numerus integer affirmativus, sed etiam si sit vel negativus vel fractus. Sic

si debeat esse

$$\frac{1}{PM} + \frac{1}{PN} = \frac{1}{a}$$

habebitur hæc æquatio

$$aP = Py - yy \text{ seu} \\ aQ + ayy = Qy$$

$$\frac{1}{PM^2} + \frac{1}{PN^2} = \frac{1}{a^2}$$

$$a^2y^2 + a^2(P - y)^2 = y^2(P - y)^2 \text{ seu} \\ a^2Q^2 + a^2y^4 = Q^2y^2$$

$$\frac{1}{PM^3} + \frac{1}{PN^3} = \frac{1}{a^3}$$

$$a^3y^3 + a^3(P - y)^3 = y^3(P - y)^3 \text{ seu} \\ a^3Q^3 + a^3y^6 = Q^3y^3$$

&c.

L I B. II. Pro exponentibus autem fractis ita res se habebit :

si debeat esse $\sqrt{PM} + \sqrt{PN} = \sqrt{a}$	habebitur hæc æquatio $\sqrt{y} + \sqrt{(P - y)} = \sqrt{a}$ feu $y = \sqrt{ay} - \sqrt{Q}$ quæ ad rationalitatem reductæ præbent $yy - Py + \frac{1}{4}(a - P)^2 = 0$ feu $yy - (a - 2\sqrt{Q})y + Q = 0$
$\sqrt[3]{PM} + \sqrt[3]{PN} = \sqrt[3]{a}$	$\sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{(P - y)} = \sqrt[3]{a}$ vel $yy - Py + \frac{1}{27a}(a - P)^3 = 0$ feu $\sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{\frac{Q}{y}} = \sqrt[3]{a}$ vel $yy - (a - 3\sqrt[3]{aQ})y + Q = 0$ &c.

Hoc igitur modo omnes Curvæ algebraicæ, in quibus ubique sit $PM^n + PN^n = a^n$, una æquatione generali comprehendendi possunt, sive n sit numerus integer affirmativus, sive negativus, sive fractus.

374. Quæ hic de conditione duarum Applicatarum unicuique Abscissæ x respondentium sunt exposita, eadem methodo transferri possunt ad ternas Applicatas singulis Abscissis respondententes. Æquatio autem generalis pro Curvis, quas singulæ Applicatæ in tribus punctis secant est hæc

$$y^3 - Py^2 + Qy - R = 0,$$

denotantibus litteris P , Q , & R Functiones quascunque univo-

formes

formes ipsius x . Sint p, q, r tres Applicatæ Abscissæ x respondentes, quarum una quidem semper est realis, verum hic ad ea potissimum Curvæ loca spectamus, in quibus omnes tres Applicatæ sint reales. Erit autem ex natura æquationum $P = p + q + r$; $Q = pq + pr + qr$; & $R = pqr$. Quare, si Curva desideretur, in qua sit vel $p + q + r$ vel $pq + pr + qr$, vel pqr quantitas constans, nil aliud est faciendum nisi ut vel P , vel Q vel R quantitas constituatur constans, binis reliquis manentibus arbitrariis.

375. Hinc quoque Curvæ inveniri poterunt, in quibus sit $p^n + q^n + r^n$, quantitas constans ubique; est enim, per ea quæ in superiori libro sunt tradita,

$$\begin{aligned} p + q + r &= P \\ p^2 + q^2 + r^2 &= P^2 - 2Q \\ p^3 + q^3 + r^3 &= P^3 - 3PQ + 3R \\ p^4 + q^4 + r^4 &= P^4 - 4P^2Q + 2QQ + 4PR \\ p^5 + q^5 + r^5 &= P^5 - 5P^3Q + 5PQQ + 5PPR - 5QR \\ &\text{\&c.} \end{aligned}$$

Deinde, si n sit numerus negativus, ponatur $z = \frac{1}{y}$; erit $z^3 - \frac{Qzz}{R} + \frac{Pz}{R} - \frac{1}{R} = 0$, & hujus æquationis tres radices sunt $\frac{1}{p}, \frac{1}{q}, \frac{1}{r}$. Hinc simili modo erit

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} &= \frac{Q}{R} \\ \frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{r^2} &= \frac{Q^2 - 2PR}{R^2} \\ \frac{1}{p^3} + \frac{1}{q^3} + \frac{1}{r^3} &= \frac{Q^3 - 3PQR + 3RR}{R^3} \\ \frac{1}{p^4} + \frac{1}{q^4} + \frac{1}{r^4} &= \frac{Q^4 - 4PQ^2R + 4QRR + 2P^2R^2}{R^4} \\ &\text{\&c.} \end{aligned}$$

LIB. II. Hujusmodi ergo expressio quantitati constanti æqualis posita præbebit relationem idoneam inter Functiones P , Q & R . Atque, si hujus æquationis ope, ex æquatione $y^3 - Py^2 + Qy - R = 0$, una harum Functionum P , Q , vel R eliminetur, habebitur æquatio pro Curva quæsita. Sic, si quæretur Curva in qua sit $p^3 + q^3 + r^3 = a^3$, fiet $P^3 - 3PQ + 3R = a^3$; & ob $R = y^3 - Py^2 + Qy$, habebitur hæc æquatio $3y^3 - 3Py^2 + 3Qy + P^3 - 3PQ = a^3$ pro Curvis quæsito satisfaciendis.

376. Sive igitur n sit numerus affirmativus sive negativus integer, solutio per datas formulas facile expedietur; at major difficultas occurrit si n fuerit numerus fractus. Proponatur quærenda Linea curva, in qua sit $\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r} = \sqrt{a}$. Sumantur utrinque quadrata: atque, ob $p + q + r = P$, habebitur $P + 2\sqrt{pq} + 2\sqrt{pr} + 2\sqrt{qr} = a$, seu $\frac{a - P}{2} = \sqrt{pq} + \sqrt{pr} + \sqrt{qr}$. Sumantur denuo quadrata; atque, ob $pq + pr + qr = Q$, erit $\frac{(a - P)^2}{4} = Q + 2\sqrt{p^2qr} + 2\sqrt{pq^2r} + 2\sqrt{pqr^2} = Q + 2(\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r})\sqrt{pqr} = 2\sqrt{aR} + Q$: unde oritur $(a - P)^2 = 4Q + 8\sqrt{aR}$, seu $Q = \frac{(a - P)^2}{4} - 2\sqrt{aR}$. Quare, Curvæ quæsitæ continebuntur in hac æquatione $y^3 - Pyy + \left(\frac{1}{4}(a - P)^2 - 2\sqrt{aR}\right)y - R = 0$; seu, (sublata irrationalitate, ob $R = \frac{(aa - 2aP + PP - 4Q)^2}{64a}$), in hac æquatione $y^3 - Pyy + Qy - \frac{(aa - 2aP + PP - 4Q)^2}{64a} = 0$.

377. Hæc autem operatio nimis fit molesta, si radices altiorum potestatum proponantur: alia ergo via erit ineunda, quæ ex hoc exemplo perspicietur. Quæretur nempe Curva in qua sit $\sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q} + \sqrt[3]{r} = \sqrt[3]{a}$. Ponatur $\sqrt[3]{pq} + \sqrt[3]{pr} + \sqrt[3]{qr} = v$: & cum sit $\sqrt[3]{pqr} = \sqrt[3]{R}$, fiet $\sqrt[3]{p^2} + \sqrt[3]{q^2} + \sqrt[3]{r^2} = \sqrt[3]{aa -$

2v; & $p + q + r = a - 3v\sqrt[3]{a} + 3\sqrt[3]{R} = P$. Deinde, CAP.
XVI.
 $\sqrt[3]{p^2q} + \sqrt[3]{p^2r} + \sqrt[3]{q^2r} = v^2 - 2\sqrt[3]{aR}$, & $pq + pr + qr = Q = v^3 - 3v\sqrt[3]{aR} + 3\sqrt[3]{RR}$. Inventis jam pro P & Q idoneis valoribus, fumendo pro v Functionem quamcunque ipsius x , pro Curvis quæfitis obtinebitur hæc æquatio

$$y^3 - (a - 3v\sqrt[3]{a} + 3\sqrt[3]{R})y^2 + (v^3 - 3v\sqrt[3]{aR} + 3\sqrt[3]{R^2})y - R = 0.$$

378. His tamen difficultatibus non obstantibus solutio generalis concinnari poterit. Cum enim ex æquatione $y^3 - Py^2 + Qy - R = 0$, y denotet has tres Applicatas p , q , & r , ponatur $p = y$, erit $P = y + q + r$, & $Q = qy + ry + qr$, seu $q + r = P - y$, & $qr = Q - y(q + r) = Q - Py + yy$. Hinc prodit $q - r = \sqrt{(P^2 + 2Py - 3yy - 4Q)}$: ideoque

$$q = \frac{1}{2}(P - y) + \frac{1}{2}\sqrt{(P^2 + 2Py - 3yy - 4Q)},$$

&

$$r = \frac{1}{2}(P - y) - \frac{1}{2}\sqrt{(P^2 + 2Py - 3yy - 4Q)}.$$

Quando ergo quæritur Curva in qua sit $p^n + q^n + r^n = a^n$, satisfaciet hæc æquatio

$$y^n + \left(\frac{1}{2}(P - y) + \frac{1}{2}\sqrt{(P^2 + 2Py - 3yy - 4Q)}\right)^n + \left(\frac{1}{2}(P - y) - \frac{1}{2}\sqrt{(P^2 + 2Py - 3yy - 4Q)}\right)^n = a^n$$

quæ æque quætionem solvit, siue n fuerit numerus integer siue fractus.

379. Innumerabiles aliæ quæstiones circa conditionem harum trium Applicatarum eadem methodo resolvi possunt: velut, si pro a^n Functio quæcunque ipsius x assumatur; tum vero etiam, præter summam quarumcunque potestatum, aliæ Functiones ipsarum p , q , & r proponi possunt, dummodo hæc quantitates ita æqualiter insint, ut earum permutatione nulla variatio

LIB. II. oriatur. Sic, istæ tres Applicatæ p , q , & r eidem Abscissæ
 ——— x respondentes ita definiri poterunt, ut triangulum, quod ex
 iis formatur, constantem habeat aream. Hujus enim trianguli
 area erit $= \frac{1}{4} \sqrt{(2ppqq + 2pprr + 2qrrr - p^4 - q^4 - r^4)}$
 quæ ponatur $= aa$. Cum igitur sit $p^4 + q^4 + r^4 = P^4 -$
 $4P^2Q + 4PR + 2QQ$, & $p^2q^2 + p^2r^2 + q^2r^2 = Q^2 - 2PR$,
 fiet $16a^4 = 4P^2Q - 8PR - P^4$, & $R = \frac{1}{2} PQ - \frac{1}{8} P^3 -$
 $\frac{2a^4}{P}$; ideoque habebitur ista æquatio $y^3 - Pyy + Qy -$
 $\frac{1}{2} PQ + \frac{1}{8} P^3 + \frac{2a^4}{P} = 0$. Si P capiatur constans $= 2b$,
 fiet insuper perimeter omnium horum triangulorum constans.
 Quare, si sumatur $Q = mxx + nbx + kaa$, prodibit Linea
 tertii ordinis hac æquatione expressa

$$y^3 + mxy - 2byy + nbxy - mbxx + kaay - nbbx + \frac{a^4}{b} -$$

$$kaab + b^3 = 0,$$

cujus hæc erit proprietas, ut trium Applicatarum p , q , & r
 singulis Abscissis respondentium primum summa sit constans,
 $= 2b$, tum vero Area trianguli ex lateribus p , q , & r for-
 mati sit ubique eadem $= aa$.

380. Similes quæstiones ejusdem methodi ope resolvi pos-
 sunt circa quatuor pluresve Applicatas eidem Abscissæ respon-
 dentes; in quo negotio cum nulla amplius occurrat difficultas,
 ad alias progrediamur quæstiones, in quibus Applicatæ non
 eidem Abscissæ, sed divertis respondentes inter se comparen-
 tur. Proposita scilicet relatio quædam inter Applicatas PM
 XIX. & QN , quarum altera Abscissæ $AP = +x$, altera Abs-
 cissæ $AQ = -x$ respondeat. Sit $y = X$, æquatio pro hac
 Curva, existente X Functione quacunque ipsius x , atque hæc
 Functio X dabit Applicatam PM ; quod si vero loco $+x$
 ubique ponatur $-x$, eadem Functio X dabit alteram Ap-
 plicatam QN . Si ergo X esset Functio par ipsius x , puta
 $= P$, foret $QN = PM$, sin autem sit X Functio impar
 ipsius

TAB.
 XIX.
 Fig. 80.

ipſius x , puta $= Q$, erit $QN = -PM$. Atque ſi P & R denotent Functiones pares, at Q & S Functiones impares ipſius x , fueritque æquatio pro Curva $y = \frac{P+Q}{R+S}$, erit

$$PM = \frac{P+Q}{R+S} \text{ \& \ } QN = \frac{P-Q}{R-S}$$

381. Quærenda ſit Curva hujus indolis, ut ſit $PM + QN$ quantitas conſtans, nempe $= 2AB = 2a$. Atque maniſeſtum eſt huic quæſtioni ſatisfacere æquationem $y = a + Q$, exiſtente Q Functione impare ipſius x ; erit enim $PM = a + Q$ & $QN = a - Q$ ideoque $PM + QN = 2a$, uti requiritur. Quod ſi ergo ponatur $y - a = u$, erit $u = Q$, quæ erit æquatio pro eadem Curva, ſumta recta Bp pro Axe & puncto B pro Abſciſſarum x initio, ita ut ſit $Bp = x$ & $pM = u$. Æquatio autem $u = Q$ indicat Curvam partibus æqualibus utrinque circa Centrum B alternatim diſpoſitis præditam. Deſcripta ergo hujusmodi Curva quacunq; MBN ſumtaque recta quacunq; PQ pro Axe, quæſtioni ita ſatisfiet, ut demiſſo in hunc Axem ex Centro B perpendicularo BA , ſumtiſque utrinque Abſciſſis æqualibus $AP = AQ$, ſemper futura ſit ſumma $PM + QN$ conſtans $= 2AB$.

382. Pro Curvis autem, quæ duas habent partes æquales circa Centrum B alternatim diſpoſitas, duas invenimus ſupra æquationes, quæ inter Coordinatas x & u ſunt

I.

$$0 = ax + \zeta u + \gamma x^3 + \delta x^2 u + \epsilon x u u + \zeta u^3 + \eta x^5 + \theta x^4 u + \&c.$$

II.

$$0 = a + \zeta x^2 + \gamma x u + \delta u^2 + \epsilon x^4 + \zeta x^3 u + \eta x^2 u^2 + \theta x u^3 + \&c.$$

Quare, ſi in utraque harum æquationum, ponatur $u = y - a$, habebuntur duæ æquationes generales inter Coordinatas x & y pro Curvis algebraicis quæſtioni propoſitæ ſatisfacientibus. Satisfacit ergo primo omnis Linea recta per punctum B ducta, deinde quoque omnis Sectio conica Centrum habens in puncto B quæſtionem ſolvat. Quia vero hoc poſteriori caſu utri-

LIB. II. que Abscissæ AP , & AQ gemina Applicata responder, (nisi Curva existente Hyperbola, Applicatæ alteri Asymtotæ parallelæ capiantur;) bina habebuntur Applicatarum paria eandem summam constituentia.

383. Si quæretur Curva MBN , in qua non summa binarum Applicatarum PM & QN , sed summa quarumcunque potestatum earum sit constans, solutio simili modo absolvetur.

Oportet enim esse $PM^n + QN^n = 2a^n$: atque perspicuum est huic conditioni satisfieri hac æquatione $y^n = a^n + Q$,

existente Q Functione quacunquè impari ipsius x : erit enim

$PM^n = a^n + Q$, & $QN^n = a^n - Q$: ideoque $PM^n +$

$QN^n = 2a^n$. Ponatur $y^n - a^n = u$, atque æquatio $u = Q$

exprimet naturam Curvæ duabus partibus æqualibus alternis circa Centrum B dispositis præditam inter Coordinatas x & u . Quam ob rem si in æquationibus §. præcedenti datis ubique loco u scribatur $y^n - a^n$, prodibunt æquationes generales pro Curvis quæsito satisfaciendis.

384. Cum igitur hujusmodi quæstiones nihil habeant difficultatis, proposita sit hæc quæstio, qua quæritur Curva MBN , ita ut in Axe a puncto fixo A , si sumantur utrinque Abscissæ AP , AQ æquales, rectangulum Applicatarum PM . QN futurum sit magnitudinis constantis, puta $= aa$. Hujus quæstionis plures dari possunt solutiones particulares, quarum præcipuas, antequam in generalem inquiramus, hic evolvamur. Sit P Functio par, & Q Functio impar ipsius Abscissæ $AP = x$, ac ponatur Applicata $PM = y = P + Q$; ex qua, sumta x negativa, fiet $QN = P - Q$. Oportet ergo esse $PM \times QN = PP - QQ = aa$, seu $P = \sqrt{(aa + QQ)}$: quæ expressio $\sqrt{(aa + QQ)}$, quia QQ est Functio par ipsius x , ac propterea quoque ipsa Functionem parem exhibet, convenientem

nientem valorem pro P præbet. Hinc pro Curva quæ sita habebitur ista æquatio $y = Q + \sqrt{(aa + QQ)}$, sumendo pro Q Functionem quamcunque imparem ipsius x .

385. Cum autem signum radicale per se ambiguitatem involvat, unicuique Abscissæ x gemina respondebit Applicata, altera affirmativa altera negativa; sic, Abscissæ AP respondebunt Applicatæ $Q + \sqrt{(aa + QQ)}$ & $Q - \sqrt{(aa + QQ)}$; at Abscissæ AQ convenient Applicatæ $-Q + \sqrt{(aa + QQ)}$ & $-Q - \sqrt{(aa + QQ)}$: unde Curva partes habebit æquales circa punctum A , tanquam Centrum, alternatim positas. Neque vero hanc ambiguitatem a signo ortam tollere licet, sumendo pro Q ejusmodi Functionem imparem, uti $\frac{a^a}{4^x} - x$, qua fiat $aa + QQ$ quadratum; fieret enim $\sqrt{(aa + QQ)} = \frac{a^a}{4^x} + x$ ideoque Functio impar, quæ in locum ipsius P substitui non posset. Quocirca pro Q ejusmodi Functio impar ipsius x sumi debet, ut $aa + QQ$ non fiat quadratum.

386. Simili modo, si ponatur $y = (P + Q)^n$, fiet $QN = (P - Q)^n$: ideoque esse debet $(P^2 - Q^2)^n = aa$. Hinc

fiet $P^2 = a^{\frac{2}{n}} + Q^2$, & $P = \sqrt{(a^{\frac{2}{n}} + Q^2)}$, quæ quantitas, dummodo fuerit irrationalis, pro P assumi poterit. Quare pro Curva quæstioni satisfaciente obtinebitur hæc æ-

quatio $y = (Q + \sqrt{(a^{\frac{2}{n}} + Q^2)})^n$. Constructio autem harum Curvarum erit facilis: describatur Curva quæcunque duas partes similes & æquales habens alternatim circa Centrum A positas, hujusque Curvæ Applicata Abscissæ $AP = x$ respondens ponatur $= z$; erit z Functio impar ipsius x ; ideoque in locum ipsius Q substitui poterit. At, ex æquatione in-

venta oritur $y^{\frac{1}{n}} - Q = \sqrt{(a^{\frac{2}{n}} + Q^2)}$: ideoque $Q = z$

LIB. II.
$$z = \frac{y^{\frac{2}{n}} - a^{\frac{2}{n}}}{2y^{\frac{1}{n}}}$$
 Ponatur $\frac{1}{n} = m$; atque, si in æqua

tionem inter z & x data ubique ponatur $z = \frac{y^{2m} - a^{2m}}{2y^m}$, obtinebitur æquatio inter x & y pro Curva quæsitâ. Cum igitur inter z & x binas invenerimus æquationes; scilicet, vel

$$0 = a + \alpha x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \epsilon x^4 + \zeta x^5 + \eta x^6 + \theta x^7 + \&c.$$

vel

$$0 = \alpha x + \beta z + \gamma x^3 + \delta x^2 z + \epsilon x z^2 + \zeta z^3 + \eta x^5 + \theta x^4 z + \&c.$$

si in his æquationibus ponatur $z = y^m - \frac{a^{2m}}{y}$ (divisorem

z negligimus quia pro Q quodcumque multipulum ipsius z sumi potest), duæ orientur æquationes generales pro Curvis quæsitis satisfaciendis.

387. Sit, præter P , quoque R Functio par, & præter Q quoque S Functio impar ipsius x , ac statuatur pro Curvis quæsitis hæc æquatio $y = \frac{P+Q}{R+S} = PM$: erit ergo $QN = \frac{P-Q}{R-S}$, fietque $\frac{PP-QQ}{RR-SS} = aa$, cui conditioni facillime satisfit ponendo $y = \frac{P+Q}{P-Q} \cdot a$, vel etiam statuendo $y =$

$(\frac{P+Q}{P-Q})^n \cdot a$. Hoc modo prius incommodum, quod cuique Abscissæ duæ pluresve Applicatæ respondebant, evitatur, atque ejusmodi Curvæ inveniuntur, ut singulis Abscissis unica tantum Applicata respondeat. Hinc Curva simplicissima satisfaciens erit Linea secundi ordinis hac æquatione $y = \frac{b+x}{b-x} \cdot a$ contenta; atque ideo Hyperbola. Hyperbola vero etiam satisfacit æquationi

quationi prius inventæ $y = Q + \sqrt{(aa + QQ)}$, ponendo $Q = nx$: erit enim $yy - 2nxy = aa$. Unde huic problemati CAP.
XVI
duplici modo per Hyperbolam satisfieri potest.

388. His præmissis, perspicuum est æquationem pro Curva quæ sita ita comparatam esse debere, ut ea, si loco x ponatur $-x$, & $\frac{aa}{y}$ loco y , nullam alterationem patiatur. Hujus-

modi formulæ sunt $(y^n + \frac{a^{2n}}{y})P$, & $(y^n - \frac{a^{2n}}{y})Q$; si

quidem P Functionem parem & Q imparem ipsius x denotet. Quod si ergo æquatio formetur, quæ ex quocunque hujusmodi formulis fuerit composita, ea erit pro Curva quæ sitioni satisfaciens. Quod si ergo M, P, R, T , &c., denotent Functiones quascunque pares ipsius x , atque N, Q, S, V , &c. Functiones impares, sequens æquatio generalis habebitur

$$\begin{aligned} 0 = & M + \left(\frac{y}{a} + \frac{a}{y}\right)P + \left(\frac{yy}{aa} + \frac{aa}{yy}\right)R + \left(\frac{y^3}{a^3} + \frac{a^3}{y^3}\right)T \text{ \&c.} \\ & + \left(\frac{y}{a} - \frac{a}{y}\right)Q + \left(\frac{yy}{aa} - \frac{aa}{yy}\right)S + \left(\frac{y^3}{a^3} - \frac{a^3}{y^3}\right)V \text{ \&c.} \end{aligned}$$

quæ si multiplicetur per Functionem imparem ipsius x , Functiones pares in impares & vicissim permutabuntur: unde etiam hujusmodi æquatio satisfaciens

$$\begin{aligned} 0 = & N + \left(\frac{y}{a} + \frac{a}{y}\right)Q + \left(\frac{yy}{aa} + \frac{aa}{yy}\right)S + \left(\frac{y^3}{a^3} + \frac{a^3}{y^3}\right)V \text{ \&c.} \\ & + \left(\frac{y}{a} - \frac{a}{y}\right)P + \left(\frac{yy}{aa} - \frac{aa}{yy}\right)R + \left(\frac{y^3}{a^3} - \frac{a^3}{y^3}\right)T \text{ \&c.} \end{aligned}$$

quæ æquationes a fractionibus liberatæ dabunt has æquationes racionales ordinis indefiniti n

LIB. II.

I.

$$\begin{aligned} \circ &= a^n y^n M + a^{n-1} y^{n+1} (P+Q) + a^{n-2} y^{n+2} (R+S) + a^{n-3} y^{n+3} (T+V) \&c. \\ &+ a^{n+1} y^{n-1} (P-Q) + a^{n+2} y^{n-2} (R-S) + a^{n+3} y^{n-3} (T-V) \&c. \end{aligned}$$

I I.

$$\begin{aligned} \circ &= a^n y^n N + a^{n-1} y^{n+1} (P+Q) + a^{n-2} y^{n+2} (R+S) + a^{n-3} y^{n+3} (T+V) \&c. \\ &- a^{n+1} y^{n-1} (P-Q) - a^{n+2} y^{n-2} (R-S) - a^{n+3} y^{n-3} (T-V) \&c. \end{aligned}$$

389. In formulis vero $(y^n + \frac{a^{2n}}{y^n})P$, &c $(y^n - \frac{a^{2n}}{y^n})Q$ loco n quoque numeros fractos scribere licet. Quare, si pro n scribantur numeri $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$, &c. ex æquationibus generalibus hinc oriendis irrationalitas sponte evanescet: habebitur enim

$$\begin{aligned} \circ &= \frac{y+a}{\sqrt{ay}} P + \frac{y^3+a^3}{ay\sqrt{ay}} R + \frac{y^5+a^5}{a^2y^2\sqrt{ay}} T + \&c. \\ &+ \frac{y-a}{\sqrt{ay}} Q + \frac{y^3-a^3}{ay\sqrt{ay}} S + \frac{y^5-a^5}{a^2y^2\sqrt{ay}} V + \&c. \\ &\text{vel hæc æquatio} \\ \circ &= + \frac{y+a}{\sqrt{ay}} Q + \frac{y^3+a^3}{ay\sqrt{ay}} S + \frac{y^5+a^5}{a^2y^2\sqrt{ay}} V + \&c. \\ &+ \frac{y-a}{\sqrt{ay}} P + \frac{y^3-a^3}{ay\sqrt{ay}} R + \frac{y^5-a^5}{a^2y^2\sqrt{ay}} T + \&c. \end{aligned}$$

quæ a fractionibus liberatæ abeunt in has

$$\begin{aligned} \circ &= + a^n y^{n+1} (P+Q) + a^{n-1} y^{n+2} (R+S) + a^{n-2} y^{n+3} (T+V) \&c. \\ &+ a^{n+1} y^n (P-Q) + a^{n+2} y^{n-1} (R-S) + a^{n+3} y^{n-2} (T-V) \&c. \\ &\& \\ \circ &= + a^n y^{n+1} (P+Q) + a^{n-1} y^{n+2} (R+S) + a^{n-2} y^{n+3} (T+V) \&c. \\ &- a^{n+1} y^n (P-Q) - a^{n+2} y^{n-1} (R-S) - a^{n+3} y^{n-2} (T-V) \&c. \end{aligned}$$

390. Ex

390. Ex his quatuor æquationibus jam ex singulis Linearum ordinibus eæ, quæ problema resolvant, facile invenientur. Ac primo quidem, ex primo ordine satisfacti Linea recta Axi AP parallela ac per punctum B transiens. Ex ordine secundo binæ æquationes priores, faciendo $n = 1$, dant $\alpha axy + yy - aa = 0$, quæ ex secunda nascitur, ponendo $N = \alpha x$, & $P = 1$, & $Q = 0$. Prima enim nullam dat Lineam curvam; binæ posteriores æquationes dant, faciendo $n = 0$, $y(\alpha + \beta x) \pm a(\alpha - \beta x) = 0$. Ex ordine tertio binæ æquationes priores dant, faciendo $n = 1$.

$$0 = ay(\alpha + \beta xx) + yy(\gamma + \delta x) \\ \pm aa(\gamma - \delta x)$$

$$0 = \alpha ayx + yy(\gamma + \delta x) \\ - aa(\gamma - \delta x)$$

binæ autem æquationes posteriores dant, ponendo $n = 0$, & $n = 1$

$$0 = y(\alpha + \beta x + \gamma xx) \\ \pm a(\alpha - \beta x + \gamma xx)$$

$$0 = ay^2(\alpha + \beta x) + y^3 \\ \pm a^2y(\alpha - \beta x) \pm a^3$$

similique modo ex sequentibus ordinibus omnes Lineæ quaesito satisfactentes reperientur.

CAPUT XVII.

LIB. II.

De inventione Curvarum ex aliis proprietatibus.

391. **Q**uæstiones, quas in præcedente Capite resolvimus, ita erant comparatæ, ut ad æquationem inter Coordinatas, sive rectangulas sive obliquangulas, facile revocari possent. Nunc igitur ejusmodi proprietates contemplemur, quæ non immediate Applicatas inter se parallelas respiciant; veluti, si rectarum ex dato quodam puncto ad Curvam educatarum indoles quæpiam proponatur. Sit C punctum, unde rectæ ad Curvam educantur CM , CN , atque proprietas quæpiam has rectas respiciens fuerit proposita: conveniet a modo hactenus usitato naturam Curvarum per Coordinatas exprimendi, ita recedere, ut istæ rectæ in æquationem introducantur.

T A B.
X X.
Fig. 81.

392. Cum igitur pluribus aliis modis naturæ Linearum æquationibus comprehendere queant, quæ inter duas variables formentur, in præsentî negotio quantitas rectæ CM ex dato puncto C ad Curvam educatæ alterius variabilis locum sustineat. Tum vero alia opus erit variabili, qua situs rectæ CM definiatur; hunc in finem assumatur recta quæpiam CA per punctum C ducta pro Axe, atque angulus ACM , seu quantitas ab hoc angulo pendens, commodissime vicem alterius variabilis tenebit. Sit ergo recta $CM = z$, & angulus $ACM = \phi$, cujus sinus, tangensve in æquationem ingrediatur; atque manifestum est, si detur æquatio quæcunque inter z & $\sin. \phi$, seu $\text{tang. } \phi$, per eam Curvæ AMN naturam determinari, pro quovis enim angulo ACM , definitur longitudo rectæ CM sicque punctum Curvæ M determinatur.

393. Diligentius autem perpendamus hunc Lineas curvas exprimendi modum. Ac primo quidem æquetur distantia z Functioni cuicunque sinus anguli ϕ ; quæ Functio si fuerit uniformis,

formis, videatur recta CM Curvæ in unico puncto M occurrere, quia angulo $ACM = \phi$ unicus valor rectæ CM respondet. Verum, si angulus ϕ duobus rectis augeatur, eadem manebit rectæ CM per punctum C ductæ positio, hoc tantum discrimine quod in plagam oppositam dirigatur; sicque alia ejusdem rectæ CM intersectio cum Curva prodibit, etiam si z æquetur Functioni uniformi sinus anguli ϕ . Scilicet, sit P Functio illa sinus anguli ϕ , ita ut sit $z = P$, unde oriatur punctum Curvæ M ; augeatur nunc angulus ϕ duobus rectis, seu ejus sinus statuatur negativus, quo factò abeat P in Q , ut sit $z = Q$; hinc ergo prodibit nova intersectio ejusdem rectæ CM productæ cum Curva m , sumendo $Cm = Q$.

TAB.
XX.

Fig. 82.

394. Quamvis ergo P sit Functio uniformis sinus anguli ϕ , tamen recta CM , sub dato angulo $ACM = \phi$ per punctum C ducta, Curvæ in duobus punctis M & m occurret, nisi sit $Q = -P$. Quod si ergo unaquæque recta CM Curvæ in unico tantum puncto occurrere debeat, quantitatem illam P Functionem esse oportet imparem sinus anguli ϕ . Hoc idem autem usuvenit, si P fuerit Functio impar cosinus anguli ϕ . Quam ob rem omnes Curvæ, quas singulæ rectæ ex C ductæ in unico puncto interfecant, continebuntur in hac æquatione $z = P$; si quidem P fuerit Functio impar cum sinus tum cosinus anguli $ACM = \phi$.

TAB.
XX.

Fig. 81.

395. Cum igitur Curvæ, quæ a rectis ex puncto C ductis in unico puncto secantur, contineantur in æquatione $z = P$, si P fuerit Functio impar sinus & cosinus anguli ϕ , seu ejusmodi Functio, quæ valorem negativum induat, si tam sinus quam cosinus anguli ϕ statuatur negativus, hinc facile pro hujusmodi Curvis æquatio inter Coordinatas orthogonales reperiri poterit. Demisso enim ex puncto M in Axem CA perpendicularo MP , si dicatur $CP = x$, $PM = y$, erit $\frac{y}{z} = \sin. \phi$ & $\frac{x}{z} = \cos. \phi$: unde, si P fuerit Functio impar ipsarum $\frac{x}{z}$ & $\frac{y}{z}$, omnes istæ Curvæ continebuntur in hac

LIB. II. æquatione $z = P$. A simplicissimis ergo incipiendo, erit

$$z = \frac{\alpha x}{z} + \frac{\beta y}{z} + \frac{\gamma z}{x} + \frac{\delta z}{y};$$

atque ad altiores potestates ascendendo, erit

$$z = \frac{\alpha x}{z} + \frac{\beta y}{z} + \frac{\gamma z}{x} + \frac{\delta z}{y} + \frac{\epsilon x^3}{z^3} + \frac{\zeta x^2 y}{z^3} + \frac{\eta x y^2}{z^3} + \frac{\theta y^3}{z^3} + \frac{i x x}{y z} + \frac{k y y}{x z} + \frac{\lambda y z}{x x} + \&c.$$

396. Si hæc æquatio per z dividatur, ubique pares tantum ipsius z occurrent potestates: ideoque, cum sit $z = \sqrt{(xx + yy)}$, eliminando z nulla irrationalitas in æquatione remanebit, prodibitque æquatio rationalis inter x & y . Æquatio ergo generalis ita erit comparata, ut unitas, seu quantitas constans, æquetur Functioni — 1 dimensionum ipsarum x & y . Cujusmodi Functio si fuerit P , erit $C = P$; ideoque $\frac{1}{C} = \frac{1}{P}$; at $\frac{1}{P}$ erat Functio unius dimensionis ipsarum x & y ; unde, si Functio quæcunque unius dimensionis ipsarum x & y æquetur constanti, æquatio erit pro Curva, quam rectæ per punctum C ductæ in unico puncto interfecant.

397. Sit P Functio n dimensionum ipsarum x & y ; & Q Functio $n + 1$ dimensionum; erit $\frac{Q}{P}$ Functio unius dimensionis: ideoque omnes Curvæ, quas hic contemplamur, continebuntur in æquatione $\frac{Q}{P} = c$, seu $Q = cP$. Denotante ergo n numerum quemcunque, æquatio generalis pro his Curvis erit

$$\alpha x^{n+1} + \beta x^n y + \gamma x^{n-1} y^2 + \delta x^{n-2} y^3 + \epsilon x^{n-3} y^4 + \&c. \\ = c (Ax^n + Bx^{n-1} y + Cx^{n-2} y^2 + Dx^{n-3} y^3 + \&c.)$$

Ex qua Lineæ singulorum ordinum, quæ a rectis ex puncto C ductis

eductis in unico tantum puncto secantur in sequentibus æquationibus continebuntur.

I.

$$ax + cy = c$$

II.

$$ax^2 + cxy + y^2 = c(Ax + By)$$

III.

$$ax^3 + cx^2y + yxy^2 + dy^3 = c(Ax^2 + Bxy + Cy^2)$$

IV.

$$ax^4 + cx^3y + yx^2y^2 + dx^2y^3 + ey^4 =$$

$$c(Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3)$$

&c.

398. Primum ergo Linea recta satisfacit, quam utique constat ab aliis Lineis rectis per datum punctum ductis non nisi in uno puncto secari posse. Secunda æquatio est pro Sectionibus conicis generalis, dummodo Sectio conica per ipsum punctum C transeat, quæ intersectio, cum omnibus rectis ex C eductis communis sit, non computatur; quoniam ergo Sectiones conicæ a recta quacunque nonnisi in duobus punctis secari possunt, omnis recta per punctum C in ipsa Curva utcumque sumtum transiens unicam tantum præbebit intersectionem. Lineæ autem curvæ sequentium ordinum omnes per ipsum punctum C transeunt, quæ intersectio omnibus rectis per C ductis communis pariter non computatur. Atque idcirco ex altioribus ordinibus in æquationibus exhibitis eæ tantum continentur, quas rectæ per C ductæ in unico puncto intersectant. Sic igitur omnes enumeravimus Curvas algebraicas, quæ a rectis per datum punctum C ductis nonnisi in unico puncto trajiciuntur.

399. Progrediamur jam ad eas Curvas investigandas quas singulæ rectæ per punctum C ductæ vel in duobus punctis intersectant, vel nusquam; si quidem radices æquationis duplicem intersectionem indicantis fiant imaginariæ. Cum igitur pro quovis angulo $ACM = \phi$, recta $CM = z$ duplicem fortiatur valorem, ea per æquationem quadraticam definitur. Sit itaque

L1B. II. itaque $zz - Pz + Q = 0$: ubi P & Q sint Functiones anguli ϕ seu ejus sinus cosinusve. Quoniam vero recta CM Curvam nonnisi in duobus punctis M & N secare debet, non solum P & Q Functiones uniformes anguli ϕ esse oportet, sed etiam aucto angulo ϕ duobus rectis nullæ novæ interfectionis oriri debent: id quod evenit si P fuerit Functio impar sinus & cosinus anguli ϕ , ita ut valorem induat negativum, si sinus & cosinus negative accipiantur: Q autem esse debet Functio par ejusdem sinus & cosinus.

400. Positis autem Coordinatis orthogonalibus $CP = x$, & $PM = y$; erit $\frac{y}{z} = \sin. \phi$, & $\frac{x}{z} = \cos. \phi$; ideoque P debet esse Functio impar ipsarum $\frac{x}{z}$ & $\frac{y}{z}$; & Q Functio par ipsarum $\frac{x}{z}$ & $\frac{y}{z}$. Ex his colligitur fore $\frac{P}{z}$ Functio rationalis ipsarum x & y , atque adeo Functio homogenea — 1 dimensionum. Simili modo erit $\frac{Q}{z^2}$ Functio rationalis ipsarum x & y homogenea — 2 dimensionum. Quod si ergo fuerit L Functio homogenea $(n+2)$ dimensionum, M Functio homogenea $(n+1)$ dimensionum, atque N Functio homogenea n dimensionum quæcunque ipsarum x & y , fractio $\frac{M}{L}$ exhibebit Functionem convenientem pro $\frac{P}{z}$, & $\frac{N}{L}$ Functionem convenientem pro $\frac{Q}{z^2}$. Quare, cum sit $zz - Pz + Q = 0$, erit $1 - \frac{P}{z} + \frac{Q}{z^2} = 0$: unde æquatio generalis pro Curvis, quæ a rectis per punctum C ductis in duobus punctis sectantur, erit $1 - \frac{M}{L} + \frac{N}{L} = 0$, seu $L - M + N = 0$; ubi est $P = \frac{Mz}{L}$ & $Q = \frac{Nz^2}{L} = \frac{N(xx + yy)}{L}$; eritque adeo P Functio irrationalis ipsarum x & y , ob $z = \sqrt{xx + yy}$, & Q est Functio rationalis nullius dimensionis.

401. Hinc

401. Hinc jam facile erit ex quovis Linearum ordine eas exhibere, quæ a rectis per datum punctum C ductis in duobus punctis vel nusquam interfecentur. Pro secundo scilicet ordine fiat $n = 0$, ac prodibit æquatio generalissima Sectionum conicarum.

CAP.
XVII.

$$axx + 6xy + \gamma y^2 - dx - \epsilon y + \zeta = 0.$$

Puncto ergo C sumto ubicunque, omnis recta per id ducta Sectionem conicam vel in duobus punctis vel nusquam interfecabit. Interim tamen fieri potest, ut unaquæpiam recta Curvam in uno tantum puncto interfecet; quod, cum inter infinitas illas rectas per C ductas vel uni vel duabus tantum usuveniat, hac exceptio nullius erit momenti: quin etiam ita hoc paradoxon explicari potest, ut altera intersectio in infinitum abeat; quam ob causam ista exceptio nostro asserto nullam vim inferre censenda est.

402. Quo autem pateat quibus casibus ista exceptio locum habeat, æquationem inter x & y reducamus ad æquationem inter z & angulum $ACM = \phi$; quæ, ob $y = z. \sin. \phi$, & $x = z. \cos. \phi$, abibit in hanc

$$z^2(\alpha(\cos. \phi)^2 + 6 \sin. \phi \cos. \phi + \gamma(\sin. \phi)^2) - z(d \cos. \phi + \epsilon \sin. \phi) + \zeta = 0:$$

ex qua patet, si fuerit coëfficiens ipsius z^2 æqualis nihilo, unicam tantum intersectionem locum habere; quod ergo evenit si fuerit $\alpha + 6. \tan. \phi + \gamma(\tan. \phi)^2 = 0$. Quod si ergo hæc æquatio duas habeat radices reales, duobus casibus recta per C educta Curvam in unico tantum puncto secabit. Quoniam vero ejusdem æquationis radices indicant Asymptotas Curvæ, perspicuum est Hyperbolas a rectis alteri Asymptotæ parallelis in unico tantum puncto secari, cujusmodi rectæ per punctum C transeuntes duæ tantum dantur. In Parabola vero unica recta Axi parallela hanc exceptionem patietur. Verum si Sectio conica fuerit Ellipsis, ubicunque assumatur punctum

L I B. II. *C*, omnis recta per id ducta Curvam vel nusquam vel in duobus punctis fecabit.

403. Lineæ tertii ordinis ista proprietate gaudentes, posito $n = 1$, continebuntur in hac æquatione

$$ax^3 + 6y^2 + \gamma xy^2 + dy^3 - ex^2 - \zeta xy - ny^2 + bx + cy = 0,$$

quæ quidem in se complectitur omnes Lineas tertii ordinis, quæ ergo omnes huc pertinent, dummodo punctum *C* in ipsa Curva capiatur. Facto enim $x = 0$, simul y valorem obtinet evanescentem. Simili modo pro Curvis quarti ordinis quæsto satisfaciendis punctum *C* non solum in Curva sed simul ejus punctum duplex esse debet; omnis ergo Linea quarti ordinis puncto duplici prædita quæsto satisfaciet, dummodo punctum *C* in puncto duplici statuatur. Sin autem *C* fuerit adeo Curvæ punctum triplex, tum omnis recta per id ducta Curvam in unico puncto interfecabit, pertinebitque ad casum primo confideratum. Pari modo Lineæ quinti ordinis satisfacient, si punctum *C* in earum puncto triplici statuatur, atque ita porro. Perpetuo autem notandum est, si recta per *C* ducta parallela fiat alicui Asymptotæ rectæ, seu Axi Asymptotæ parabolicæ, tum semper unicam dari intersectionem, altera in infinitum abeunte.

404. Egregie hæc conveniunt cum natura Linearum cujusque ordinis: quia enim Linea cujusque ordinis a Linea recta in tot punctis interfecari potest, quot exponens ordinis continet unitates, (atque revera in totidem punctis interfecatur, nisi aliquot intersectiones vel fiant imaginariæ vel in infinitum abeunt:) & quia hic omnes intersectiones, sive reales sive in infinito factas sive imaginarias, æque computamus, easque tantum excludimus quæ in ipso puncto *C* fiunt; manifestum est, cum Linea ordinis n in n punctis a quaque Linea recta secetur, punctum *C* in puncto totuplici, quot numerus $n - 2$ continet unitates, collocari debere, ut intersectio duplex prodeat.

405. His

405. His notatis facile erit problemata, quæ circa relationem inter quosque binos ipsius z valores CM & CN proponi solent, vel resolvere, vel solutionis inconvenientiam ostendere. Cum enim duo ipsius z valores CM & CN sint radices hujus æquationis $zz - Pz + Q = 0$, erit ipsorum summa $= P$, & rectangulum eorum $CM \cdot CN = Q$. Quare, si primum requirantur ejusmodi Curvæ, in quibus ubique sit summa $CM + CN$ constans, Functionem P quantitatem constantem esse oporteret. Cum autem ex quæstionis natura unaquæque recta per C ducta Curvæ in duobus tantum punctis occurrere debeat, necesse est ut sit $P = \frac{Mz}{L} = \frac{M\sqrt{(xx+yy)}}{L}$ (§. 399.), quæ quantitas irrationalitatem involvens nunquam constans esse potest. Atque idcirco nulla datur Curva huic quæstioni proprie satisfaciens.

406. Quod si autem ista conditio, qua duæ tantum cuiusque rectæ per C ductæ intersecctiones cum Curva postulantur, omittatur atque ejusmodi quærantur Curvæ, quæ quidem plures duabus intersecctiones exhibeant, inter eas autem duæ M & N ejusmodi adsint, ut sit $CM + CN$ quantitas constans, tales Curvæ innumerabiles exhiberi poterunt, ponendo $P =$ quantitati illi constanti $CM + CN = a$. Erit enim $zz - az + Q = 0$, denotante Q Functionem $\frac{Nz}{L}$; & quia hæc æquatio adhuc irrationalitate laborat, ea sublata, erit $a^2z^2 = (zz + Q)^2$, seu $a^2 = zz(1 + \frac{N}{L})^2$, seu $a^2L^2 = (xx + yy)(L^2 + 2LN + NN)$, in qua erit L Functio homogenea $n + 2$, at N Functio homogenea n dimensionum ipsarum x & y . Simplificissima ergo Curva hoc sensu quæstionem resolvens habebitur si ponatur $L = xx + yy$ & $N = \pm bb$, eritque $aa(xx + yy) = (xx + yy \pm bb)^2$, quæ est pro Linea quarti ordinis complexa; complectitur enim duos Circulos in C concentricos. Curvæ autem continuæ simplicissimæ quæsito satisfaciens erunt sexti ordinis, ponendo $L = axx + cxy +$
E c 2 yy^2 ,

LIB. II. $\gamma\gamma^2$, & $N = \pm bb$, pro quibus æquatio erit $aa(axx + 6xy + \gamma\gamma)^2 = (xx + yy)(axx + 6xy + \gamma\gamma \pm bb)^2$. Sit $a = 1$, $6 = 0$, & $\gamma = 0$, erit $yy + xx = \frac{axx^2}{x^2 \pm 2bbxx + b^2}$,
 seu $y = \frac{x\sqrt{aaxx - x^2 \mp 2bbxx - b^2}}{xx \pm bb}$.

407. Sin autem hujusmodi solutiones, quibus rectæ per C ductæ Curvam in pluribus quam duobus punctis intersecant, excludantur, quam conditionem natura quæstionis requirere videtur, nullæ profus Curvæ quæstioni satisfacere sunt dicendæ; ac propterea nulla dabitur Linea continua, quæ a rectis per C ductis ita in duobus tantum punctis M & N intersecetur, ut summa $CM + CN$ sit constans. At vero si istæ interseciones hujus indolis postulentur, ut rectangulum $CM \times CN$ debeat esse constans, quæ proprietas in Circulum ita competit ut is satisfaciatur ubicunque punctum C capiatur, infinitæ aliæ Linæ curvæ inveniri poterunt, quæ idem præstent. Debebit enim Q esse quantitas constans, æqualis scilicet illi rectangulo $CM \cdot CN$, quod sit $= aa$; quæ positio, cum sit $Q = \frac{Nzz}{L}$, ac propterea Functio rationalis ipsarum x & y , non pugnat.

408. Sit igitur $\frac{Nzz}{L} = aa$, seu $L = \frac{Nzz}{aa} = \frac{N(xx + yy)}{aa}$, atque Curvæ quæsito satisfaciendæ omnes continebuntur in hac æquatione $\frac{N(xx + yy)}{aa} - M + N = 0$, seu $Maa = N(xx + yy + aa)$, ubi M denotat Functionem quamcunque homogeam $n + 1$ dimensionum, N vero Functionem homogeam n dimensionum ipsarum x & y , ita ut sit $\frac{M}{N} = \frac{xx + yy + aa}{aa}$ Functio unius dimensionis ipsarum x & y . Hæc ergo æquatio omnes complectitur Curvas, quæ a rectis per C ductis in duobus tantum punctis M & N ita secantur, ut rectangulum $CM \cdot CN$ sit ubique constans $= aa$.

409. Cum

409. Cum igitur $\frac{M}{N}$ sit Functio homogenea unius dimensionis ipsarum x & y , casus simplicissimus prodibit si ponatur $\frac{M}{N} = \frac{\alpha x + \xi y}{a}$, ex quo orietur hæc æquatio $xx + yy - a(\alpha x + \beta y) + aa = 0$, quæ semper est pro Circulo: & cum sit æquatio pro Circulo generalis inter Coordinatas orthogonales, manifestum est Circulum quæsito satisfacere, ubicunque punctum C accipiatur, omnino uti ex Elementis constat. Præter Circulum ergo ex Sectionibus conicis nulla alia Curva huic quæstioni satisfacit. Verum ex singulis ordinibus Linearum sequentibus infinita Linearum satisfaciendum copia exhiberi potest: & quidem omnes, quæ ex quolibet ordine satisfaciunt. Sic Lineæ tertii ordinis, quæ isthac proprietate gaudent, continebuntur in hac æquatione

$$\frac{\alpha xx + \xi xy + \gamma yy}{a(dx + \epsilon y)} = \frac{xx + yy + aa}{aa}$$

feu

$$(dx + \epsilon y)(xx + yy) - a(\alpha xx + \xi xy + \gamma yy) + aa(dx + \epsilon y) = 0.$$

Atque simili modo ex omnibus sequentibus Linearum ordinibus ea, quæ satisfaciunt, exhibebuntur.

410. Proposita jam sit hæc quæstio, ut inter omnes Lineas curvas, quæ a rectis per punctum C ductis in duobus punctis secantur, ex definiantur, in quibus sit summa quadratorum $CM^2 + CN^2$ quantitas constans, puta $= aa$. Cum igitur sit $CM + CN = P$, & $CM \cdot CN = Q$, erit $CM^2 + CN^2 = PP - 2Q$; debeat ergo esse $PP - 2Q = 2aa$, feu $Q = \frac{PP - 2aa}{2}$. Quare, ob $P = \frac{Mz}{L}$, & $Q = \frac{Nz}{L}$, erit $\frac{2Nz}{L} = \frac{MMz}{LL} - 2aa$; ideoque $N = \frac{MM}{2L} - \frac{aaL}{z}$; quæ æquatio, cum sit L Functio $n+2$ dimensionum, M Functio $n+1$ dimensionum, & N Functio n dimensionum ipsarum x &

LIB. II. y , nullam implicat difficultatem. Sumtis ergo pro L & M ejusmodi Functionibus, erit $N = \frac{MM}{2L} - \frac{aaL}{2z}$: unde pro Curvis quæsito satisfaciendis ista resultat æquatio generalis

$$L - M + \frac{MM}{2L} - \frac{aaL}{2z} = 0,$$

feu

$$2LL(xx + yy) - 2LM(xx + yy) + MM(xx + yy) - 2aaLL = 0:$$

quæ, si sit $M = 0$, præbet Circulum cujus Centrum in C , quem quæsito satisfacere per se est perspicuum.

411. Ponamus $n + 1 = 0$, ut sit M quantitas constans $= 2b$, & $L = ax + \beta y$, atque orietur Linea quarti ordinis hac æquatione contenta

$$(ax + \beta y)^2(xx + yy - aa) - 2b(ax + \beta y)(xx + yy) + 2bb(xx + yy) = 0.$$

Alia æquatio quarti ordinis reperitur, si ponatur $L = xx + yy$ & $M = 2(ax + \beta y)a$, tum enim æquatio per $2xx + 2yy$ divisa dabit

$$(xx + yy)^2 - 2a(ax + \beta y)(xx + yy) + 2aa(ax + \beta y)^2 - aa(xx + yy) = 0.$$

Nisi autem divisio per $xx + yy$ succedat, æquatio inventa (ponendo $2M$ loco M), quæ est

$$LL(xx + yy) - 2LM(xx + yy) + 2MM(xx + yy) - aaLL = 0,$$

semper erit ordinis $2n + 6$; ideoque ex quolibet ordine pari obtinetur æquatio pro Curva satisfaciende. Præterea vero, si L per $xx + yy$ fuerit divisibilis; scilicet, si, denotante N Functionem quamcunque homogeneam n dimensionum ipsarum x & y , fuerit $L = (xx + yy)N$, orietur alia æquatio generalis hæc

$$NN(xx + yy)^2 - 2MN(xx + yy) + 2MM - aaNN(xx + yy) = 0,$$

quæ est ordinis $2n + 4$, ita ut ex singulis ordinibus paribus duplex nascatur æquatio pro Curvis proposita proprietate gaudentibus.

dentibus. Sic, ex ordine sexto satisfaciunt Curvæ in his duabus æquationibus contentæ

$$(axx + \beta xy + \gamma yy)^2 (xx + yy - aa) - 2a(dx + ey)(xx + yy) \\ (axx + \beta xy + \gamma yy - a(dx + ey)) = 0,$$

$$\& \\ (dx + ey)^2 (xx + yy)(xx + yy - aa) = \\ 2a(axx + \beta xy + \gamma yy)((dx + ey)(xx + yy) - a(axx + \beta xy + \gamma yy)).$$

In nullo ergo Linearum ordine impari ulla datur Linea hanc quæstionem resolvens.

412. Si jam non quærantur ejusmodi Curvæ, in quibus sit summa quadratorum $CM^2 + CN^2$ constans, sed in quibus sit $CM^2 + CM.CN + CN^2$ vel generaliter $CM^2 + n.CM.CN + CN^2$ quantitas constans; problema simili modo resolutionem admittet. Cum enim sit $CM^2 + n.CM.CN + CN^2 = P^2 + (n - 2)Q$, ponatur $P^2 + (n - 2)Q = aa$, eritque $Q = \frac{aa - P^2}{n - 2}$, quæ æquatio nullo incommodo la-

borat. Cum igitur sit $P = \frac{Mz}{L}$, & $Q = \frac{Nzz}{L}$, erit $\frac{M^2z^2}{L^2} + \frac{(n - 2)Nzz}{L} = aa$; ideoque $N = \frac{aaL}{(n - 2)zz} - \frac{M^2}{(n - 2)L}$.

Quare, cum æquatio pro Curva sit $L - M + N = 0$, habebitur pro hac proprietate, qua $CM^2 + n.CM.CN + CN^2$ debet esse constantis magnitudinis $= aa$, ista æquatio

$$(n - 2)LLzz - (n - 2)LMzz + aaLL - M^2zz = 0 \\ \text{seu, ob } zz = xx + yy, \text{ erit} \\ aaLL + (xx + yy)((n - 2)L^2 - (n - 2)LM - M^2) = 0,$$

existente L Functione $m + 2$, & M , $m + 1$ dimensionum ipsarum x & y . Sit N Functio quæcunque homogenea m dimensionum, ac ponatur $L = (xx + yy)N$, prodibit alia æquatio generalis hæc

$$aa(xx + yy)N^2 + (n - 2)(xx + yy)^2N^2 - (n - 2)(xx + yy)MN - M^2 = 0.$$

LIB. II. 413. Si statuatur $n = 2$, ut sit $(CM + CN)^2 = aa$, fiet, vel $aaLL = (xx + yy)MM$, vel $MM = aa(xx + yy)N^2$. Utraque autem æquatio cum sit homogenea, continebit duas pluresve æquationes hujus formæ $ay = \beta x$; ideoque quæsto satisfieri non poterit nisi duabus pluribusve rectis per punctum C ductis, quæ autem cum eo sensu, quo quæstio proponitur, non satisfaciant, perspicuum est hoc problema nullam admittere solutionem, uti supra jam notavimus: deberet enim esse $CM + CN = constanti a$. Quod si vero statuatur $n = -2$, ita ut quadratum differentiæ $(CN - CM)^2$, ideoque ipsa differentia MN deberet esse constans, orientur hæ duæ æquationes

$$aaLL = (xx + yy)(2L - M)^2$$

&

$$aa(xx + yy)NN = (2(xx + yy)N - M)^2$$

unde simplicissima solutio oritur, si ponatur $N = 1$ & $M = 2bx$; erit enim

$$aa(xx + yy) = 4(xx + yy - bx)^2,$$

seu, posito $aa = 8cc$ erit,

$$(xx + yy)^2 = 2(cc + bx)(xx + yy) - bbxx.$$

$$\text{Ergo } xx + yy = cc + bx \pm c\sqrt{(cc + 2bx)},$$

atque

$$y = \sqrt{(cc + bx - xx \pm c\sqrt{(cc + 2bx)})}.$$

414. Dantur ergo innumerabiles Lineæ curvæ, quæ a rectis per punctum C ductis ita in duobus punctis M & N secantur, ut intervallum MN perpetuo sit constans. Ac primo quidem, patet huic conditioni satisfacere Circulum in C Centrum habentem, erit enim tum perpetuo intervallum $MN =$ Diametro Circuli; prodit autem Circulus ex æquationibus generalibus, si ponatur $M = 0$. Tum vero, post Circulum, satisfaciunt Lineæ quarti ordinis hæc æquatione $aa(xx + yy) = 4(xx + yy - bx)^2$, æque hæc $aaaxx = (xx + yy)(2x - 2b)^2$, contentæ; ad quarum formam cognoscendam expediêt ad æquationem

æquationem inter z & ang. ϕ regredi. Cum igitur sit $xx + yy = zz$, & $x = z \cdot \cos. \phi$, & $y = z \cdot \sin. \phi$, posito $a = 2c$, erit primo

$$\begin{aligned}
 cczz &= (zz - bz \cdot \cos. \phi)^2 \\
 &\text{feu} \\
 b \cdot \cos. \phi + c &= z. \\
 &\text{tumque} \\
 cc(\cos. \phi)^2 &= (z \cdot \cos. \phi - b)^2 \\
 &\text{feu} \\
 z &= \frac{b}{\cos. \phi}
 \end{aligned}$$

ex quibus facilis Curvarum constructio nascitur.

415. Ad Curvam enim æquatione $z = b \cdot \cos. \phi + c$ contentam construendam, per C ducatur recta ACB , in qua sumatur $CD = b$, & ex D sumatur utrinque $DA = DB = c$, erunt primo puncta A & B in Curva quæsitâ. Tum, ducta quavis recta NCM per C , ex D in eam demittatur perpendicularum DL , & ab L utrinque sumatur $LM = LN = c$, erunt puncta M & N in quæsitâ Curva; ideoque perpetuo intervallum $MN = 2c$, uti quæstio postulat.

TAB.
XX.
Fig. 83,
84, 85.

Hic notandum est, si fuerit $CD = b$ minor quam c , Curvam in C habituram esse punctum conjugatum.

Sin autem sit $b = c$, Curva in C Cuspide erit prædita, evanescente intervallo AC .

Denique, si fit b minor quam c , punctum A inter C & B cadet, Curvaque in C habebit nodum seu punctum duplex. Ceterum harum Curvarum Diameter erit recta ACB , & quæ huic normaliter insistit ECF erit $= 2c$.

416. Præter has Curvas in se redeuntis ex Linearum ordine quarto, etiam satisfaciunt ex eodem ordinalia in infinitum excurrentes, quæ hac æquatione $z = \frac{b}{\cos. \phi} + c$ continentur.

TAB.
XXI.
Fig. 86.

Quarum constructio ita se habebit; ducta per C recta principali CAB , sumatur $CD = b$, capiaturque $DA = DB = c$; erunt puncta A & B in Curva. Deinde, per D ducatur nor-

.1B. II. malis EDF ; & , acta recta quacunq̄ CL , erit $CL = \frac{b}{\cos \phi}$, vocato angulo $DCL = \phi$. Tum perpetuo abscindatur $LM = LN = c$, atque puncta M & N determinabunt Curvam quæsitam. Ex hac autem constructione perspicuum est, Curvam sic descriptam esse *Conchoidem* Veterum, polum C habentem, & Asymtotam rectam EF , ad quam quatuor Curvæ rami in infinitum convergunt. Vocatur autem portio bBb *Conchois exterior*, & gAg *interior*, præter quas partes in C punctum existit conjugatum.

417. Hæ Curvæ ex Linearum ordine quarto satisfaciunt. Facile autem erit Curvas altiorum ordinum quot libuerit exhibere. Quod si enim fuerit P Functio impar sinus & cosinus anguli ϕ , tum ista æquatio $z = bP \pm c$ præbebit Curvam continuam, quam omnes rectæ per C ductæ ita in duobus punctis M & N secabunt, ut intervallum MN futurum sit constans $= 2c$. Referrî autem hæ Curvæ omnes poterunt ad genus Conchoidalium, loco rectæ EF directricis substituendo Lineam quamcunq̄ Curvam æquatione $z = bP$ contentam. Supra autem vidimus hanc æquationem in se complecti Lineas curvas, quæ a rectis per punctum C ductis non nisi in uno puncto secantur. Quare, ob intervallum c arbitrium, ex unaquaque Curva $z = bP$ innumerabiles Curvæ ad præfens institutum accommodatæ describi poterunt.

A B.
XI.
.87.

418. Sumatur scilicet pro lubitu Curva $CEDLF$, quæ ab omnibus rectis per punctum C ductis in unicus tantum punctis D, L , secetur. Tum in his singulis rectis CL productis utrinque ab L capiantur intervalla æqualia $LM = LN = c$; eruntque puncta M & N in Curva quæsitâ. Sic igitur motu continuo describi poterit Curva $AMP CQB NRC$, quæ a singulis rectis per C ductis in binis punctis M & N ita interfecabitur, ut intervallum MN sit perpetuo constans $= 2c$. Ubi notandum est, si Curva $CEDF$ fuerit Circulus per punctum C ductus, tum Curvam descriptam fore eandem Lineam quarti ordinis, quam primo invenimus §. 414.

419. Sic

419. Sic igitur satisfecimus quæſtioni, qua quærebantur Li- CAP
 near curvæ AMN a rectis per punctum C ductis ita secandæ XVI
 in duobus punctis M & N , ut eſſet $CN - CM$ ſeu $CM^2 -$
 $- 2 CM. CN + CN^2$ perpetuo quantitas conſtans. Paucis T A I
 igitur adhuc evolvamus caſum, quo $CM^2 + GM. CN + XX$
 CN^2 debet eſſe quantitas conſtans. In §. 412. ergo poni de- Fig. 81
 bet $n = 1$, ſicque naſcetur vel iſta æquatio

$$aaLL = (xx + yy)(L^2 - LM + M^2)$$

exiſtente L Functione $m + 1$, & M Functione m dimenſio-
 num ipſarum x & y . Vel oriatur hæc altera æquatio

$$aa(xx + yy)NN = (xx + yy)^2 NN - (xx + yy)MN + MM$$

in qua M eſt Functio homogœnea una dimenſione ſuperior ip-
 ſarum x & y , quam Functio N .

420. Primum quidem perſpicuum eſt, ſi ponatur $M = 0$,
 prodire Circulum, cujus Centrum in puncto C fit conſtitu-
 tum; qui, cum omnes rectæ ex C ad Curvam ductæ ſint æ-
 quales, etiam omnibus hujus generis quæſtionibus ſatisfacit.
 Pro præſenti autem caſu poſt Circulum Curvæ ſimpliciſſimæ
 prodibunt, ſi in priori æquatione ponatur $M = b$ & $L = x$,
 eritque

$$aaxx = (xx + yy)(xx - bx + bb)$$

ſive

$$yy = \frac{xx(aa - bb + bx - xx)}{bb - bx + xx}.$$

Quod ſi autem in altera æquatione ponatur $N = 1$, & $M =$
 bx , habebitur quoque Linea quarti ordinis

$$aa(xx + yy) = (xx + yy)^2 - bx(xx + yy) + bbxx,$$

ſeu

$$xx + yy = \frac{1}{2} bx + \frac{1}{2} aa \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4} a^4 + \frac{1}{2} abx - \frac{3}{4} bbxx\right)}$$

quæ pariter, ac prior, quæſtioni ſatisfaciet.

LIB. II. 421. His expeditis quæstionibus, consideremus altiores potestates binorum ipsius z valorum ex æquatione $zz - Pz + Q = 0$,

existente $P = \frac{Mz}{L}$ & $Q = \frac{Nzz}{L}$: ubi L Functionem homogeneam $n+2$; M , $n+1$ & N , n dimensionum ipsarum x & y significat; estque $x =$ Abscissæ CP & $y =$ Applicatæ PM . Proposita igitur sit quæstio, qua binæ intersectiones M & N ejus indolis requiruntur, ut sit $CM^3 + CN^3 = a^3$. Cum ergo sit, ex æquationis $zz - Pz + Q = 0$, natura, $CM^3 + CN^3 = P^3 - 3PQ$ debebit esse $P^3 - 3PQ = a^3$: quæ æquatio, cum P^3 & PQ sint quantitates irrationales, locum habere nequit. Huic ergo quæstioni in stricto sensu profus satisfieri non potest: sin autem numerus intersectionum non spectetur etiam si duabus plures prodant, tum quidem infinitis modis Curvæ satisfaciens inveniri possunt, ponendo $Q = \frac{P^3 - a^3}{3P}$, & pro P capiendo Functionem quamcunque sinus & cosinus anguli $ACM = \phi$.

422. Sin autem ejusmodi Curvæ requirantur, in quibus sit $CM^4 + CN^4 = a^4$, tum poni debet $P^4 - 4P^2Q + 2QQ = a^4$; quæ æquatio, cum nulla insit irrationalitas, nullam involvit contradictionem. Debet ergo esse $Q = PP + \sqrt{\left(\frac{1}{2}P^4 + \frac{1}{2}a^4\right)}$, quæ Functio, non obstante signo radicali, tanquam uniformis spectari potest, quia si $\sqrt{\left(\frac{1}{2}P^4 + \frac{1}{2}a^4\right)}$ sumeretur negative, pro z valores imaginarii resultarent. Erit ergo $\frac{Nzz}{L} = \frac{MMzz}{LL} + \sqrt{\left(\frac{M^4z^4}{2L^4} + \frac{1}{2}a^4\right)}$; & cum pro Curva sit $L - M + N = 0$, seu $zz - \frac{Mzz}{L} + \frac{Nzz}{L} = 0$, erit $zz - \frac{Mzz}{L} + \frac{MMzz}{LL} + \sqrt{\left(\frac{M^4z^4}{2L^4} + \frac{1}{2}a^4\right)} = 0$. Consequenter, sublata irrationalitate, erit

$$\frac{z^4}{L^4}$$

$$\frac{z^4}{L^4} (LL - LM + MM)^2 = \frac{M^4 z^4}{2L^4} + \frac{1}{2} a^4,$$

seu

$$(xx + yy)^2 (2(LL - LM + MM)^2 - M^4) = a^4 L^4,$$

quæ omnes Curvas satisfaciens in se complectitur.

423. Alio faciliore modo, uti supra §. 372, hæc & similes quæstiones resolvi poterunt. Cum enim fit $CM \cdot CN = Q$, si altera ipsarum CM & CN dicatur $= z$, erit altera $= \frac{Q}{z} = \frac{Nz}{L}$, ob $Q = \frac{Nz}{L}$. Quare, si debeat esse

$$CM^n + CN^n = a^n; \text{ fiet } z^n + \frac{N^n z^n}{L^n} = a^n; \text{ ideoque}$$

$$z^n = \frac{a^n L^n}{L^n + N^n};$$

quæ æquatio, si fuerit n numerus par, jam est rationalis quæsitoeque satisfaciet. At, si fit n numerus impar, ad irrationalitatem tollendam quadrata sumi debent; quo fit, ut numerus intersectionum duplicetur, sicque Curva oriatur non eo sensu satisfaciens uti desideratur. Sic, si debeat

$$\text{esse } CM^2 + CN^2 = a^2, \text{ fiet } z^2 = xx + yy = \frac{aaLL}{LL + NN};$$

$$\text{quæ convenit cum supra inventa } xx + yy = \frac{aaLL}{(L-M)^2 + L^2} (410),$$

ob $L - M + N = 0$. Generaliter ergo, si debeat esse $CM^n + CN^n = a^n$ fueritque n numerus par, obtinebitur

$$\text{ista æquatio } z^n = (xx + yy)^{\frac{n}{2}} = \frac{a^n L^n}{L^n + N^n} = \frac{a^n L^n}{L^n + (L - M)^n},$$

existentibus L Functione $m + 2$ dimensionum, M Functione $m + 1$ dimensionum, & N Functione m dimensionum ipsarum x & y .

424. Hæc eadem solutio etiam ex consideratione summæ $CM + CN = P$, eruitur. Si enim altera ipsarum CM &

LIB. II.

CN ponatur $= z$, erit altera $= P - z$. Hinc, si $CM^n + CN^n$ debeat esse constans, erit $z^n + (P - z)^n = a^n$. Vidimus autem esse debere $P = \frac{Mz}{L}$, & $Q = \frac{Nz^2}{L}$; ita ut sit $L - M + N = 0$; ex quo erit $z^n + \frac{z^n(M - L)^n}{L^n} = a^n$; seu $z^n = \frac{a^n L^n}{L^n + (M - L)^n}$, vel $z^n = \frac{a^n L^n}{L^n + N^n}$; vel, eliminando L , erit $z^n = \frac{a^n (M - N)^n}{(M - N)^n + N^n}$. Hæ æquationes, si fue-

rit n numerus par, conditionem propositam adæquate adimplent. At, si n sit numerus impar, dabuntur quidem duæ intersecciones M & N , ut sit $CM^n + CN^n = a^n$; at præter has habebuntur duæ aliæ intersecciones eadem proprietate gaudentes, ita ut quælibet recta per C ducta bis proprietatem propositam involvat.

425. His expositis, facile erit quæstiones alias maxime difficiles resolvere: debeat enim Curva inveniri quæ ab omnibus rectis per C ductis ita in duobus punctis M & N secetur, ut sit $CM^n + CN^n + \alpha CM \cdot CN (CM^{n-2} + CN^{n-2}) + \beta \cdot CM^2 \cdot CN^2 (CM^{n-4} + CN^{n-4})$ &c. quantitas constans $= a^n$. Ponatur alter valor $CM = z$, erit alter $CN = \frac{Q}{z} = \frac{Nz}{L}$; quibus valoribus substitutis oriatur ista æquatio, qua natura Curvæ exprimitur, $z^n (L^n + N^n + \alpha LN (L^{n-2} + N^{n-2})) + \beta L^2 N^2 (L^{n-4} + N^{n-4}) + \text{&c.}$

= a

$= a^n L^n$. Est autem $L - M + N = 0$, atque L , M , & N sunt Functiones homogeneæ ipsarum x & y dimensionum $m + 2$, $m + 1$ & m , uti supra descripsimus: unde erit, vel $L = M - N$, vel $N = M - L$ sicque infinitæ solutiones hinc deducuntur.

426. Pergamus jam ad Curvas investigandas, quæ a singulis rectis per punctum fixum C ductis in tribus punctis secantur. Hujusmodi ergo Curvarum natura exprimitur hac æquatione generali

$$z^3 - Pz^2 + Qz - R = 0 :$$

ubi z denotat distantiam cujusque Curvæ puncti a C ; & P , Q , R sunt Functiones anguli $ACM = \phi$, ejusve sinus & cosinus. Per easdem autem rationes quas supra allegavimus apparet, ne plures quam tres intersectiones prodeant, P & R esse debere Functiones impares ipsius $\sin. \phi$ & $\cos. \phi$; verum Q statui debere Functionem parem. Quod si ergo ponantur Coordinatæ orthogonales $CP = x$, $PM = y$, ut sit $xx + yy = zz$, atque denotent K , L , M & N Functiones homogeneas $(n + 3)$, $(n + 2)$, $(n + 1)$ & n dimensionum ipsarum x & y , fore $P = \frac{Lz}{K}$, $Q = \frac{Mz^2}{K}$, & $R = \frac{Nz^3}{K}$: ideoque inter Coordinatas orthogonales x & y habebitur pro hujusmodi Curvis ista æquatio generalis

$$K - L + M - N = 0 ;$$

ex qua patet punctum C fore Curvæ punctum totuplex quot index n contineat unitates.

427. Primum ergo, huc pertinent omnes Lineæ tertii ordinis, ubicunque punctum C extra Curvam capiatur. Deinde, in hac æquatione continentur omnes Lineæ quarti ordinis, dummodo punctum C in ipsa Curva accipiatur. Tertio, omnes Lineæ quinti ordinis, in quibus datur punctum duplex huc referuntur, si modo punctum C in earum puncto duplici constituitur.

LIB. II. stituatur. Similique modo Lineæ altiorum ordinum hanc conditionem implebunt, si habeantur puncta multiplicia tanti exponentis, quot n contineat unitates, si $n+3$ exponat ordinem, ad quem æquatio pertineat.

428. Sint p, q, r tres illi valores ipsius z , quos obtinet ex æquatione $z^3 - Pz^2 + Qz - R = 0$, pro quovis valore anguli $CAM = \phi$; eritque, ex natura æquationum $P = p + q + r$; $Q = pq + pr + qr$ & $R = pqr$. Cum jam P & R per x & y rationaliter exprimi nequeant, manifestum est ejusmodi Curvas exhiberi non posse, in quibus sit vel $p + q + r$ vel pqr quantitas constans; neque adeo ulla Functio impar ipsarum $p, q, \& r$ constanti æqualis poni poterit. Pares autem Functiones sine ulla difficultate constantem valorem obtinere poterunt. Sic, si requiratur ut sit $pq + pr + qr = aa$, erit $Q = \frac{Mz^2}{K} = aa$; ideoque $M(xx + yy) = aaK$; qui valor in æquatione $K - L + M - N = 0$, substitutus, dabit æquationem generalem omnes Curvas hac proprietate præditas in se complectentem:

$$M(xx + yy) - aaL + aaM - aaN = 0;$$

vel, eliminando M , hanc

$$(xx + yy)K - (xx + yy)L + aaK - (xx + yy)N = 0.$$

429. Pari modo, aliæ similes quæstiones facile resolventur. Uti, quærat Curva, quæ a rectis per C ductis ita in tribus punctis secetur, ut sit $p^2 + q^2 + r^2 = a^2$. Cum enim sit $p^2 + q^2 + r^2 = P^2 - 2Q$, & $P = \frac{Lz}{K}$ atque $Q = \frac{Mz^2}{K}$, fiet $\frac{L^2z^2}{K^2} - \frac{2Mz^2}{K} = aa$, seu $(xx + yy)L^2 - 2(xx + yy)KM = aaKK$. At, pro Curvis tres intersecciones admittentibus habetur hæc æquatio generalis $K - L + M - N = 0$, cujus natura in hoc consistit ut maximus ipsarum x & y dimensionum numerus

numerus ternario superet minimum. Quo igitur hujusmodi ^{C A P.} obtineatur æquatio, simulque sit $(xx + yy)L^2 - 2(xx + yy)$ ^{XVII.}
 $KM = aaKK$, multiplicetur illa æquatio per $2(xx + yy)K$,
 ut eliminari possit M , atque prodibit hæc æquatio generalis
 casui proposito satisfaciens

$$2(xx + yy)KK - 2(xx + yy)KL + (xx + yy)L^2 - aaKK - 2(xx + yy)KN = 0.$$

Membrum enim, in quo plurimæ insunt dimensiones, est
 $2(xx + yy)KK$, continetque $2n + 8$ dimensiones ipsarum x &
 y ; atque membrum infimum est $2(xx + yy)KN$, & continet
 $2n + 5$ dimensiones, uti natura rei postulat.

430. Quoniam ergo neque summum neque imum mem-
 brum evanescere potest, ponamus, ad Curvam simplicissimam
 inveniendam, $n = 0$; fitque $N = b^3$, $K = x(xx + yy)$, &
 $L = 0$, atque prodibit hæc æquatio

$$2(xx + yy)^3 x^2 - aaxx(xx + yy)^2 - 2b^3 x(xx + yy)^2 = 0,$$

quæ per $2x(xx + yy)^2$ divisâ præbet hanc

$$x(xx + yy) - \frac{1}{2} aax - b^3 = 0,$$

quæ pertinet ad ordinem tertium. Sin autem non fit $L = 0$,
 sed $L = 2c(xx + yy)$, prodibit æquatio ordinis quarti

$$xx(xx + yy) - 2cx(xx + yy) + 2cc(xx + yy) - \frac{1}{2} aaxx - b^3 x = 0,$$

feu

$$xx(xx + yy) + (2c - x)^2 (xx + yy) = aaxx + 2b^3 x.$$

Simili autem modo ex altioribus ordinibus plurimæ aliæ
 Curvæ quæstioni satisfaciens eruentur.

431. Deinde, etiam Curvæ inveniri poterunt ex in quibus
 fit $p^4 + q^4 + r^4$ quantitas constans. Cum enim sit $p^4 + q^4 + r^4$
 $= P^4 - 4P^2Q + 2QQ + 4PR$, poni debet $P^4 -$
 $4P^2Q + 2QQ + 4PR = c^4$.

Erit ergo

$$z^4 (L^4 - 4KL^2M + 2K^2M^2 + 4K^2LN) = c^4K^4:$$

ideoque

$$4K^2LNz^4 = c^4K^4 - z^4 (L^4 - 4KL^2M + 2K^2M^2),$$

Euleri *Introduct.*, in *Anal. infin.* Tom. II.

G g

unde

LIB. II. unde valor ipsius N in æquatione $K - L + M - N = 0$, substitutus dabit æquationem generalem pro Curvis huic conditioni satisficientibus.

432. Poterit autem simul & huic conditioni $p^4 + q^4 + r^4 = c^4$, & præcedenti $p^2 + q^2 + r^2 = a^2$ satisfieri. Per hanc enim esse debet $3zL^2 - 2zzKM = aaKK$; unde fit $2z^2KM = zL^2 - aaKK$.

Deinde, cum fit

$$4K^2LNz^4 = c^4K^4 - L^4z^4 + 4KL^2Mz^4 - 2K^2M^2z^4$$

$$4K^2LNz^4 = c^4K^4 + L^4z^4 - 2aaK^2L^2z^2 - 2K^2M^2z^4$$

$$\& 4K^2LMz^4 = 2KL^3z^4 - 2aaK^3Lz^2.$$

Substituantur hi valores loco M & N in æquatione $K - L + M - N = 0$, seu $4K^3Lz^4 - 4K^2L^2z^4 + 4K^2LMz^4 - 4K^2LNz^4 = 0$, atque prodibit hæc æquatio pro Curva

$$4K^3Lz^4 - 4K^2L^2z^4 + 2KL^3z^4 - 2a^2K^3Lz^2 - c^4K^4 - L^4z^4 + 2a^2K^2L^2z^2 + 2K^2M^2z^4 = 0.$$

At, ob

$$KMz^2 = \frac{1}{2}L^2z^2 - \frac{1}{2}aaKK$$

erit

$$2K^2M^2z^4 = \frac{1}{2}L^4z^4 - aaK^2L^2z^2 + \frac{1}{2}a^4K^4,$$

ideoque pro Curvis quæsitis habebitur hæc æquatio generalis

$$8K^3Lz^4 - 8K^2L^2z^4 + 4KL^3z^4 - 4a^2K^3Lz^2 - 2c^4K^4 - L^4z^4 + 2a^2K^2L^2z^2 + a^4K^4 = 0.$$

433. Quia K debet esse Functio homogenea ipsarum x & y una dimensione altior quam L , Curva simplicissima in qua tres intersecciones exhibeant simul $p^2 + q^2 + r^2 = a^2$, & $p^4 + q^4 + r^4 = c^4$ prodibit, si ponatur $K = zz$, & $L = bx$; erit ergo

$$8bxz^6 - 8bbxxz^4 + 4b^3x^3z^2 - 4a^2bxz^4 - 2c^4z^4 - b^4x^4 + 2a^2b^2x^2z^2 + a^4z^4 = 0,$$

quæ, ob $zz = xx + yy$, est rationalis, præbetque Lineam ordinis septimi, cujus C est punctum quadruplex. Alia autem Linea septimi ordinis satisfaciens obtinebitur, si ponatur $K = x$, & $L = b$; erit enim

$$8bx^3z^4 - 8bbxxz^4 + 4b^3xz^4 - 4aabbx^3zz - 2c^4x^4 - b^4z^4 + 2aabbxxzz + a^4x^4 = 0,$$

feu

$$z^4 = \frac{4aabbx^3zz - 2aabbxxzz + 2c^4x^4 - a^4x^4}{8bx^3 - 8bbxx + 4b^3x - b^4}.$$

Unde fit

$$zz = \frac{2aabb^3 - aabbxx + xx\sqrt{(2bx - bb)(2c^4(bb - 2bx + 4xx) - 2a^4(bb - 2bx + 2xx))}}{b(2x - b)(4xx - 2bx + bb)}$$

434. Jam ulterius progredi liceret ad Curvas, quæ a rectis per punctum C ductis in quatuor punctis interfecerentur; atque ex iis illæ inveniri possent, quæ datis proprietatibus sint præditæ. Verum, si ad præcepta in præcedentibus tradita attendamus, nulla profus supererit difficultas, omniaque, quæ in hoc genere desiderari poterunt, sine ullo fere labore vel expeditentur, vel, nisi quæstio solutionem genuinam admittat, hoc ipsum statim cognoscetur. Quam ob rem huic materiæ amplius non immorabor, ad aliud argumentum ad cognitionem Linearum curvarum pertinens progressurus.

LIB. II.

CAPUT XVIII.

De Similitudine & Affinitate Linearum curvarum.

435. **I**N omni æquatione pro Linea curva, præter Coordinatas orthogonales x & y , inesse debent quantitates constantes, vel una vel plures, uti a, b, c , &c.; quibus Lineæ constantes designantur, & quæ cum variabilibus x & y ubique eundem Linearum dimensionum numerum constituunt: Si enim in uno termino extet productum ex n Lineis in se invicem multiplicatis, necesse est ut in singulis reliquis terminis totidem Lineæ in se invicem multiplicentur, quoniam alias quantitates heterogenæ inter se comparari deberent, quod fieri non potest. Quocirca in omni æquatione pro Linea curva Lineæ constantes a, b, c , &c., cum variabilibus x & y ubique eundem dimensionum numerum constituent, nisi forte Linea quæpiam constans unitate vel alio numero absoluto exprimitur. Hoc igitur notato, si nullæ Lineæ constantes in æquatione inessent, tum variables x & y solæ ubique eundem dimensionum numerum adimplerent, ideoque Functionem homogeneam constituerent. Supra autem jam vidimus hujusmodi æquationem ad Lineam curvam non pertinere, sed aliquot rectas se invicem in eodem puncto interfecantes exhibere.

436. Contemplemur igitur æquationem in qua, præter binas variables x & y , unica inest Linea constans a ; ita ut tres Lineæ a, x , & y ubique in æquatione eundem dimensionum numerum constituent. Hujusmodi ergo æquatio, prout Lineæ constanti a alii atque alii valores tribuantur, infinitas producet Lineas curvas, quæ tantum quantitate a se invicem discrepant, ceterum vero omnino similes inter se sint futuræ. Omnes ergo Lineæ curvæ, quæ hoc modo in eadem æquatione comprehenduntur, merito ad idem genus referuntur atque inter se similes

similes esse censentur, neque aliud in illis deprehendetur discrimen, nisi quod in Circulis diversæ magnitudinis inesse intelligitur. CAP. XVIII

437. Quo hæc similitudo melius percipiatur, consideremus æquationem determinatam, præter variables x & y , unicam Lineam constantem a , quam *Parametrum* vocare liceat, continentem, hanc

$$y^3 - 2x^3 + ayy - aax + 2aay = 0.$$

Sit AC valor Parametri a ; atque, existente $AC = a$, sit AMB Linea curva hac æquatione contenta, sumta recta AB pro Axe, vocatisque Coordinatis $AP = x$ & $PM = y$. TAB. XXI. Fig. 88.

Tribuatur jam Parametro a quicumque alius valor $ac = a$, sitque amb Linea curva, quam nunc illa æquatio præbet; eruntque hæ Lineæ curvæ AMB & amb inter se similes. TAB. XXI. Fig. 89.

Quod si enim maneat $AC = a$, $AP = x$, $PM = y$, atque sit $ac = \frac{1}{n} AC = \frac{a}{n}$; tum vero capiatur $ap = \frac{1}{n} AP = \frac{x}{n}$, erit $pm = \frac{1}{n} PM = \frac{y}{n}$; namque si in illa æquatione, loco a , x , & y , scribantur respective $\frac{a}{n}$, $\frac{x}{n}$, & $\frac{y}{n}$, ob omnes terminos per n^3 divisos, eadem ipsa resultabit æquatio.

438. Curvæ ergo similes hanc habebunt proprietatem, ex qua similitudinis natura eo luculentius apparebit, ut sumtis Abscissis AP , ap in ratione Parametrorum AC & ac Applicatæ PM & pm simul eandem habituræ sint rationem: scilicet, si sumatur $AP : ap = AC : ac$, tum quoque erit $PM : pm = AC : ac$. Cum ergo sit $AP : PM = ap : pm$, hæ Curvæ in sensu geometrico inter se erunt similes, atque, quantitate excepta, iisdem profus affectionibus gaudebunt. Sumtis nimirum Abscissis AP , ap homologis seu Parametris AC & ac proportionalibus, non solum Applicatæ PM &

LIB. II. pm rationem tenebunt Parametrorum sed etiam omnes aliæ
 Lineæ similiter ductæ, quin etiam Curvarum arcus AM & am
 erunt ut AC & ac . Tum vero etiam Areæ similes APM
 & apm erunt in ratione duplicata, seu ut AC^2 ad ac^2 . Atque,
 si sumantur duo puncta homologa O & o quæcunque, ita ut sit
 $AO:ao = AC:ac$, ex iisque sub æqualibus angulis AOM ,
 aom ad Curvas rectæ ducantur OM & om , erit quoque
 $OM:om = AC:ac$. Ob similitudinem denique etiam Tangentes
 in punctis homologis M & m ad Axem æqualiter inclinabuntur,
 atque adeo radii osculi ibidem tenebunt rationem Parametrorum
 AC & ac .

439. Hinc patet omnes Circulos esse figuras similes, quæ continentur æquatione $yy = 2ax - xx$; parique modo omnes Curvæ æquatione $yy = ax$ contentæ, hoc est omnes Parabolæ, erunt inter se figuræ similes. Ex huiusmodi autem æquationibus, quibus Curvas similes contineri vidimus, quia Coordinatæ x & y cum Parametro a ubique eundem constituent dimensionum numerum, si valor ipsius y definiatur, reperietur is æqualis Functioni homogeneæ unius dimensionis ipsarum a & x . Vicissim ergo, si denotet P Functionem homogeneam unius dimensionis ipsarum a & x , æquatio $y = P$ innumerabiles continebit Curvas similes, quæ oriuntur, si Parametro a successive alii atque alii valores tribuantur. Simili autem modo ex huiusmodi æquatione pro Curvis similibus Abscissa x æquabitur Functioni unius dimensionis ipsarum a & y , atque ipsa Parameter a æqualis erit Functioni unius dimensionis ipsarum x & y .

440. Data autem Curva quacunque AMB , infinitæ aliæ ipsi similes amb per facilem praxin describi possunt. Sumatur enim ratio quæcunque, quam latera homologa Curvæ datæ & describendæ inter se tenere debeant, quæ sit $1:n$; atque, si Curva data AMB referatur ad Axem AB per Coordinatas normales AP & PM , super Axe simili ab capiatur Abscissa ap , ut sit $AP:ap = 1:n$, & ex p erigatur Applicata normalis pm , ut sit pariter $PM:pm = 1:n$, eritque punctum m in
 Curva

Curva simili *amb*, ita ut puncta *M* & *m* sint homologa. Vel, descriptio quoque ex puncto quocunque fixo *O* absolvi poterit; sumto enim in Curva describenda puncto simili fixo *o*, fiat perpetuo angulus *aom* æqualis angulo *AOM*, & abscindatur *om*, ut sit $OM : om = 1 : n$, eritque punctum *m* pariter in Curva simili *amb*. Hoc itaque modo, pro quavis ratione $1 : n$ ad arbitrium assumpta, Curva similis describi poterit. Solent autem in hunc finem confici instrumenta mechanica, quorum ope figuræ cujuscunque magnitudinis, quæ sint datæ similes, delineari possunt.

441. Quod si igitur natura Curvæ propositæ *AM* exprimitur æquatione quacunque inter Coordinatas $AP = x$, & $PM = y$, inde facili negotio reperietur æquatio pro Curva simili *am*. Sit enim Abscissa homologa $ap = X$ & Applicata $pm = Y$; erit ex constructione $x : X = 1 : n$ & $y : Y = 1 : n$; unde fit $x = \frac{X}{n}$ & $y = \frac{Y}{n}$. Hi ergo valores in æquatione

in *x* & *y* data substituti producent æquationem inter *X* & *Y* pro Curvis similibus. Si igitur in hac nova æquatione solæ Coordinatæ *X* & *Y* cum littera *n* dimensiones constituere censeantur, numerus dimensionum ubique erit nullus; vel, si æquatio, ad fractiones tollendas, multiplicetur per quampiam potestatem ipsius *n*, orietur æquatio, in qua tres hæ quantitates *X*, *Y*, & *n* ubique eundem dimensionum numerum producant. Supra autem vidimus in omni æquatione pro Curvis similibus ambas Coordinatas cum ea constante, cujus variatione Curvæ similes existunt, ubique eundem dimensionum numerum constituere; quod igitur est criterium æquationum Curvas similes continentium.

442. Quemadmodum in Curvis similibus Abscissæ & Applicatæ homologæ in eadem ratione sive augentur sive diminuantur; ita, si Abscissæ aliam sequantur rationem, aliam vero Applicatæ, Curva non amplius orientur similes. Verum tamen, quia Curvæ hoc modo ortæ inter se quandam Affinitatem tenent, has Curvas *affines* vocabimus: complectitur ergo
Affinitas

LIB. II. Affinitas sub se similitudinem tanquam speciem: quippe Curvæ affines in similes abeunt, si ambæ illæ rationes, quas Abscissæ & Applicatæ seorsim sequuntur, evadant æquales. Ex Curva ergo quacunque data AMB innumerabiles Curvæ affines amb reperientur hoc modo; sumatur Abscissa ap , ita ut sit $AP : pm = 1 : m$; tum constituatur Applicata pm , ut sit $PM : pm = 1 : n$; sicque, mutando harum rationum $1 : m$ & $1 : n$, vel alterutram vel utramque, innumerabiles prodibunt Curvæ, quæ primæ AMB erunt affines.

TAB.
XXI.
Fig. 88.
89.

443. Exprimatur natura Curvæ datæ AMB æquatione quacunque inter Coordinatas orthogonales $AP = x$, & $PM = y$; atque in Curva affini amb modo præcedente descripta ponatur Abscissa $ap = X$, & Applicata $pm = Y$, ob $x : X = 1 : m$, & $y : Y = 1 : n$, erit $x = \frac{X}{m}$ & $y = \frac{Y}{n}$. Quod si ergo hi valores in æquatione inter x & y data substituantur, proveniet æquatio generalis pro Curvis affinibus inter X & Y . Ad hujus æquationis naturam penitus evolvendam, ponamus æquationem pro Curva data AMB ita esse conformatam, ut Applicata y æquetur Functioni cuicunque ipsius x , quæ sit $= P$, seu esse $y = P$. Si igitur in P loco x substituatür $\frac{X}{m}$, fiet P Functio nullius dimensionis ipsarum X & m ; ideoque æquatio generalis pro Curvis affinibus ita erit comparata, ut $\frac{Y}{n}$ æquetur Functioni nullius dimensionis ipsarum X & m ; seu, quod eodem redit, Functio nullius dimensionis ipsarum Y & n æquabitur Functioni nullius dimensionis ipsarum X & m .

444. Discrimen autem inter Curvas similes & affines hoc potissimum est notandum, quod Curvæ, quæ sunt similes respectu unius Axis vel puncti fixi, eandem similes sint futuræ respectu aliorum quorumvis Axium seu punctorum homologorum. Curvæ autem, quæ tantum sunt affines, tales tantum sunt respectu eorum Axium, ad quos referuntur, neque pro lubitu alii Axes, seu puncta homologa, in ipsis dantur, ad quæ

quæ affinitas referri possit. Ceterum vero, notandum est, uti omnes Curvæ similes ad eundem ordinem, atque adeo ad idem Linearum Genus referuntur, ita etiam Curvas affines semper in eodem Linearum ordine eodemque genere comprehendendi. Quæ ut clarius percipiantur, similitudinem atque affinitatem nonnullis exemplis Curvarum notiorum illustrasse conveniet.

CAP.
XVIII.

445. Sit igitur Curva data Circulus ad Diametrum relatus, cujus natura exprimitur æquatione $yy = 2cx - xx$. Ponatur $x = \frac{X}{n}$ & $y = \frac{Y}{n}$, atque æquatio inter X & Y resultans complectetur omnes Curvas similes; erit autem $\frac{Y^2}{n^2} = \frac{2cX}{n} -$

$\frac{XX}{nn}$, seu, $Y^2 = 2ncX - XX$; ex qua patet omnes Curvas

Circulo similes quoque esse Circulos, quorum Diametri $2nc$ utcunque discrepent. Ad Curvas autem Circulo affines inveniendas ponatur $x = \frac{X}{m}$ & $y = \frac{Y}{n}$, prodibitque $\frac{Y^2}{nn} =$

$\frac{2cX}{m} - \frac{XX}{mm}$, seu $m^2 Y^2 = 2mn^2cX - nnXX$, quæ est æquatio generalis pro Ellipsi ad alterum Axem principalem relata; unde intelligitur omnes Ellipses esse Lineas curvas Circulo affines. Quare, omnes Ellipses sunt quoque Curvæ inter se affines. Simili autem modo intelligetur, omnes Hyperbolas esse Curvas inter se affines. Ellipses autem, atque etiam Hyperbolæ, in quibus eadem ratio inter binos Axes principales intercedit, Curvæ erunt inter se similes.

446. Quod ad Parabolam æquatione $yy = cx$ expressam attinet, perspicuum quidem est omnes Curvas ipsi similes quoque esse Parabolas, atque adeo omnes Parabolas esse Curvas inter se similes. Quod si autem ad Curvas Parabolæ affines spectemus, posito $y = \frac{Y}{n}$ & $x = \frac{X}{m}$, prodibit æquatio $Y^2 = \frac{n^2c}{m} X$, quæ cum etiam sit pro Parabolis, manifestum est,

LIB. II. quæ Curvæ Parabolæ sint affines, eisdem simul Parabolæ esse similes; ita ut hoc casu similitudo æque late pateat atque affinitas. Idem quoque evenit in omnibus Curvis, quarum natura exprimitur æquatione duobus tantum terminis constante, cujusmodi sunt $y^2 = cxx$; $y^3 = cxx$; $y^2x = c^3$; &c.; his nimirum Curvis, cum parabolicis tum hyperbolicis, quæ aliæ Curvæ sunt affines eadem quoque sunt similes; quæ convenientia in Curvis alius generis non locum habet, uti jam de Circulo & Ellipsi notavimus.

447. Quemadmodum ex data æquatione inter x & y , quam quotunque quantitates constantes a , b , c , &c. ingrediuntur, si singulis constantibus determinati valores tribuantur, unica Linea curva determinata oritur; ita, si una constantium, puta a , mutabilis assumatur, eique successive alii atque alii valores tribuantur, quia ex unoquoque valore peculiaris Curva nascitur, omnino infinitæ Curvæ orientur, quæ erunt similes si, præter a , nullæ aliæ Lineæ constantes æquationem ingrediuntur; contra vero dissimiles. Sin autem, præter a , alia quoque constans b mutabilis statuatur; tum, ob mutabilitatem ipsius b , ex unoquoque ipsius a valore emergent Lineæ curvæ infinitæ, sicque omnino ex mutabilitate duarum constantium a & b infinities infinitæ provenient Lineæ curvæ differentes. Si insuper tertia constans c mutabilis assumatur, tum adhuc infinities plures resultabunt Lineæ curvæ; sicque quo major fuerit constantium, quæ mutabiles statuuntur, numerus, eo majore infiniti potestate numerus Curvarum resultantium exprimitur.

448. Consideremus autem aliquanto diligentius eas Lineas curvas infinitas, quæ ex una æquatione procedunt, dum tantum una Linearum constantium mutabilis assumatur. Huiusmodi autem æquatio, si idem Axis idemque Abscissarum initium retineatur, non solum Lineas illas curvas infinitas exhibet, sed etiam earum positionem indicat, ita ut his Curvis infinitis spatium quoddam impleatur, in quo nullum assignari queat punctum, quin per id aliqua infinitarum Curvarum transeat.

eat. Prout ergo æquatio fuerit comparata, Curvæ illæ infinite vel erunt dissimiles vel similes, uti ex præcedentibus judicare licet; quin etiam evenire potest, ut omnes Curvæ sint inter se non solum similes sed etiam æquales, ratione situs tantum differentes. Sic ista æquatio $y = a + \sqrt{(2cx - xx)}$, posita a mutabili, exhibebit infinitos Circulos æquales radii $= c$, quorum centra sunt in recta ad Axem normali sita.

449. Hinc etiam vicissim, si una eademque Curva super plano in infinitis diversis sitibus secundum certam legem describatur, æquatio præberi poterit, qua per unius constantis mutabilitatem omnes hæ infinite Curvæ inter se æquales simul exhibeantur. Sit Curva infinite variis sitibus exhibita Circulus cujus radius $= c$, qui ita infinite describatur, ut vertices A, a , datam Curvam AaL , quæ *Directrix* vocetur, constituent; Diametri autem ab perpetuo Axi AB maneant parallelæ. Ad æquationem ergo pro his infinite Circulis invenendam, sumatur quodvis *Directricis* punctum a , unde in Axem principalem demittatur perpendicularum, aK . Ponatur $AK = a$; & ob *Directricem* datam, dabitur Ka per a : sit ergo $Ka = A$, eritque A Functio quæpiam ipsius a data. Tum ex a Axi principali ducatur parallela ab , quæ erit Diameter Circuli Verticem in *Directricis* puncto a habentis, ex cujus puncto quovis m ducatur Applicata $mP = y$, respondens Abscissæ $AP = x$; erit ergo $ap = x - a$, & $pm = y - A$. Positis autem $ap = t$, & $pm = u$; erit, ex natura Circuli, $uu = 2ct - tt$; jam, ob $t = x - a$, & $u = y - A$, habebitur $(y - A)^2 = 2c(x - a) - (x - a)^2$, quæ erit æquatio generalis omnes Circulos secundum *Directricem* AaL modo descripto dispositos complectens. Omnes scilicet isti Circuli ex æquatione inventa prodibunt, si Linea a , a qua simul A pendet, mutabilis assumatur.

TAB.
XXII.
Fig. 90.

450. Simili modo si, loco Circuli, alia quæcunque Linea Curva amb ita promoveatur secundum ductum *Directricis* AaL , ut ejus Vertex seu Abscissarum initium a in *Directrice*, atque Axis ab sibi perpetuo parallelus maneat, eadem Linea

H h 2 curva

LIB. II. curva infinities descripta habebitur, atque æquatio inveniri poterit. qua omnium harum Linearum curvarum natura simul comprehendatur. Data sit natura hujus Curvæ promotæ per æquationem inter Coordinatas $ap = t$ & $pm = u$; ac, pro Axe principali, ad quem omnes Curvæ junctim consideratæ referantur, sumatur recta AB Axibus ab parallela, quæ simul sit Axis Directricis AaL . Posito jam, ut ante $AK = a$, & $Ka = A$, ita ut A sit Functio quædam ipsius a , vocetur Abcissa $AP = x$, & Applicata $Pm = y$, erit $t = x - a$, & $u = y - A$. Quod si ergo hi valores loco t & u in æquatione inter t & u data substituantur, obtinebitur æquatio generalis omnes Curvas amb conjunctim complectens. Quicunque enim valor determinatus ipsi a tribuatur, prodibit una quædam Curva amb ex infinitis quæ per hunc motum sunt descriptæ. Sic, si Curva amb fuerit Parabola æquatione $uu = ct$ expressa, tum infinitæ Parabolæ æquales, quarum Vertices per Directricem AaL sunt dispositi, Axesque rectæ AB paralleli, continebuntur in hac æquatione $(y - A)^2 = c(x - a)$.

451. Quemadmodum hic Verticem Curvæ A in data Curva Directrice ita promoveri posuimus, ut ejus Axis sibi semper maneret parallelus; ita etiam, dum Vertex per datam Curvam transfertur, positio Axis Curvæ ab utcumque variari poterit; sicque multo generalior obtinebitur æquatio pro eadem Curva in dato plano secundum quamcunque legem infinities descripta. Quod quo clarius expediamus, ponamus primum Verticem Curvæ A per circumferentiam Aa ita progredi, ut Axis Curvæ ab perpetuo ad Centrum Circuli O dirigatur. Motus igitur rotatorius Curvæ AMB cum Axe BAO circa punctum O factus exhibebit omnes istos infinitos ejusdem Curvæ AMB situs diversos quos omnes in una æquatione, quam constans quæpiam mutabilis posita ingredia-tur, complecti oportet.

452. Statuatur radius invariabilis $AO = aO = c$; sitque angulus $AOa = a$, qui mutabilis assumitur: ex Curvæ in situ quocunque

T A B.
XXII.
Fig 91.

quocunque *amb* descriptæ puncto quovis *m* ad rectam *OAB* pro Axe principali assumtam demittatur Applicata *mP*, sitque $OP = x$, & $Pm = y$. Tum ex *m* in proprium Curvæ *amb* Axem *ab* demittatur quoque perpendicularis *mp*: vocatisque $ap = t$, & $pm = u$, dabitur æquatio invariabilis inter *t* & *u*, quia natura Curvæ *amb* exprimitur. Ex *P* ducatur *Ps* ipsi *Ob* parallela, cui Applicata *mp* producta occurrat in *s*; eritque $ps = x \cdot \sin. \alpha$; $Op - Ps = x \cdot \cos. \alpha$; tum vero, ob angulum $Pms = AOa = \alpha$, erit $Ps = y \cdot \sin. \alpha$ & $ms = y \cdot \cos. \alpha$. Hinc erit $Op = c + t = x \cdot \cos. \alpha + y \cdot \sin. \alpha$ & $mp = u = y \cdot \cos. \alpha - x \cdot \sin. \alpha$. In æquatione ergo inter *t* & *u* data substituuntur $t = x \cdot \cos. \alpha + y \cdot \sin. \alpha - c$ & $u = y \cdot \cos. \alpha - x \cdot \sin. \alpha$; prodibitque æquatio generalis inter Coordinatas *x* & *y*, quæ, angulo α mutabili assumto, omnes Curvas *amb* in se complectetur.

453. Promoveatur nunc autem Vertex Curvæ *AMB* secundum Directricem quamcunque *AaL*, interea vero positio Axis *ab* continuo ita mutetur, ut angulus *AOa* quomocunque pendeat a puncto *a*. Scilicet, Vertice in *a* versante, sit $AK = a$, & $Ka = A$, atque angulus $AOa = \alpha$; ubi, ob Directricem datam, erit *A* Functio quædam cognita ipsius *a*: anguli α autem sinus cosinusve sit pariter Functio quæpiam ipsius *a*. His positis, erit $KO = \frac{A}{\tan. \alpha}$, & $Oa = \frac{A}{\sin. \alpha}$. Ex Curvæ *amb* puncto quocunque *m* primum ad A-

TAB.
XXII.
Fig. 92.

xem principalem *AO* demittatur perpendicularum *mP*, tum vero etiam in proprium Axem *mp*, sitque $AP = x$, $Pm = y$; & $ap = t$, $pm = u$, dabiturque æquatio invariabilis inter Coordinatas *t* & *u*, ex qua æquatio variabilis inter *x* & *y* omnes Curvas *amb* complectens definiri debet.

454. Ad hoc præstandum ex *P* in *mp* productam ducatur normalis *Ps*, quæ erit Axi Curvæ *abO* parallela: atque, ob angulum $Pms = AOa = \alpha$, erit $Ps = y \cdot \sin. \alpha$ & $ms =$

H h 3 $y \cdot \cos. \alpha$.

LIB. II. $y \cdot \text{cof. } \alpha$. Deinde, ob $OP = a + \frac{A}{\text{tang. } \alpha} - x$, erit $ps = a \cdot \text{sin. } \alpha + A \cdot \text{cof. } \alpha - x \cdot \text{sin. } \alpha$, & $Op - Ps = a \cdot \text{cof. } \alpha + \frac{A \cdot \text{cof. } \alpha}{\text{tang. } \alpha} - x \cdot \text{cof. } \alpha$. Hinc erit $Op = a \cdot \text{cof. } \alpha + \frac{A \cdot \text{cof. } \alpha}{\text{tang. } \alpha} - x \cdot \text{cof. } \alpha + y \cdot \text{sin. } \alpha = \frac{A}{\text{sin. } \alpha} - t$; ideoque $t = A \cdot \text{sin. } \alpha - a \cdot \text{cof. } \alpha + x \cdot \text{cof. } \alpha - y \cdot \text{sin. } \alpha$, & $u = -a \cdot \text{sin. } \alpha - A \cdot \text{cof. } \alpha + x \cdot \text{sin. } \alpha + y \cdot \text{cof. } \alpha$. Quam ob rem, si in æquatione inter t & u data substituatur,

$$t = (x - a) \cdot \text{cof. } \alpha - (y - A) \cdot \text{sin. } \alpha$$

$$\quad \quad \quad \&$$

$$u = (x - a) \cdot \text{sin. } \alpha + (y - A) \cdot \text{cof. } \alpha$$

oriatur æquatio quæ sita inter x & y . Quacunque ergo lege eadem Curva amb in plano infinities describatur, hoc modo inveniatur æquatio generalis istas Curva omnes simul in se continens.

455. Hoc igitur modo in æquationem includuntur Curvæ numero infinitæ eadem, tantum ratione situs a se invicem discrepantes; si quidem æquatio, quæ inter t & u datur, fuerit invariabilis, neque constantem mutabilem a in se contineat. Quod si autem una pluresve constantes, quæ in æquatione inter t & u insunt, simul ab a pendere assumantur, tum obtinebuntur infinitæ Curvæ diversæ, sive similes sive dissimiles, eadem pariter æquatione contentæ: Similes scilicet erunt omnes Curvæ, si æquatio inter t & u ita fuerit comparata ut u æquetur Functioni cuicunque homogeneæ unius dimensionis ipsarum t & f , existente f quantitate utcunque ab a pendente; sin secus accidat, Curvæ erunt dissimiles.

TAB.
XXII.
Fig. 93.

456. Ut hoc argumentum Curvarum diversarum exemplo illustremus, ponamus infinitos describi Circulos AB , aB , amb per datum punctum B transeuntes, qui omnes Centra sua habeant sita in recta AE , cujusmodi Circulis in mappis geographicis meridiani repræsentari solent. Demittatur ex B perpen-

perpendicularum in rectam AC , sitque $BC = c$, quod intervallum est invariabile. Tum consideretur Circulus infinitorum descriptorum quicumque amB ; unde una demissa Applicata mP , sit $CP = x$, & $Pm = y$, radius porro hujus Circuli, qui, etsi respectu ejusdem Circuli est constans, tamen respectu omnium est mutabilis, ponatur $aE = BE = a$: erit $CE = \sqrt{aa - cc}$ & $PE = x + \sqrt{aa - cc}$. Cum igitur sit $PE^2 + Pm^2 = aa$, erit $y^2 + x^2 + 2x\sqrt{aa - cc} + aa - cc = aa$; seu $yy = cc - 2x\sqrt{aa - cc} - xx$: sin autem intervallum CE loco constantis variabilis in æquationem introducatur, ponaturque $CE = a$, habebitur hæc æquatio aliquanto simplicior $yy = cc - 2ax - xx$, quæ, ob mutabilitatem ipsius a , omnes omnino Circulos per B ductos & Centra in recta AE habentes exhibebit. Simili vero modo Curvæ quæcunque infinitæ certa quadam lege dispositæ ad unam æquationem revocabuntur, dummodo discrimen inter constantes variables & invariables probe observetur.

CAP.
XVIII.

C A P U T X I X.

De intersectione Curvarum.

457. **Q**uemadmodum Lineæ curvæ a rectis interfecentur, in præcedentibus Capitibus jam sæpius vidimus, ubi ostendimus Lineas secundi ordinis a rectis in pluribus quam duobus punctis secari non posse, Lineas autem tertii ordinis plures quam tres intersectiones, & quarti ordinis plures quam quatuor & ita porro non admittere. Cum igitur in hoc Capite constituerim intersectiones, quas duæ quævis Curvæ inter se faciunt, definire, oportebit hanc tractationem a Lineis rectis inchoare, atque ipsa illa puncta indagare, in quibus recta quæpiam data Curvam datam trajicit. Hoc enim modo via parabitur ad intersectiones mutuas Linearum curvarum

LIB. II. rum determinandas, quod argumentum maximum usum habere solet in construendis æquationibus altiorum graduum, qua de re in sequenti Capite fusius tractabo.

TAB. XXIII. 458. Sit igitur proposita Curva quæcunque AMm , cujus natura data sit per æquationem inter Coordinatas orthogonales *Fig. 94.* $AP = x, PM = y$. Dacatur jam recta quæcunque BMm , quæ quot & quibusque in punctis sectura sit Curvam AMm definiri oporteat. Ad hoc quæeratur æquatio pro Linea recta pariter inter Coordinatas orthogonales x & y ad eundem Axem AP idemque Abscissarum initium A relata. Æquatio ergo pro Linea recta erit hujusmodi $\alpha x + \beta y = \gamma$; qua indicatur, posito $x = 0$, fore $y = AD = \frac{\gamma}{\beta}$, posito autem $y = 0$, fore $x = -AB = \frac{\gamma}{\alpha}$; unde, concursus B hujus rectæ cum Axe, pariterque angulus ad B , cujus tangens est $= \frac{AD}{AB} = -\frac{\alpha}{\beta}$, innotescit. Sic igitur tam Curva quam Recta proposita per æquationes inter communes Coordinatas x & y exprimuntur.

459. Quod si in utraque æquatione Abscissas x perpetuo æquales assumamus, Applicatæ y , si sint diversæ, ostendent, quantum Curvæ & rectæ puncta eidem Abscissæ respondentia a se invicem distent. Si igitur ex utraque æquatione æqualis prodeat valor Applicatæ y , tum ibi Curva & Recta commune habebunt punctum, ideoque eo in loco dabitur intersectio. Ad intersectiones ergo inveniendas in utraque æquatione, præter Abscissas x , quoque Applicatæ y æquales sunt constituendæ; sicque habebuntur duæ æquationes duas quantitates incognitas x & y evolventes, ex quarum resolutione vel Abscissæ x , quibus intersectiones respondent, vel Applicatæ y reperientur. Scilicet, si ex istis duabus æquationibus eliminetur incognita y , æquatio nascetur solam incognitam x completens, cujus valores exhibebunt Abscissas AP, Ap unde Applicatæ PM, pm educæ per intersectionum puncta M & m transibunt.

640. Cum

460. Cum æquatio pro recta BMm sit $\alpha x + \beta y = \gamma$, ex ea fiet $y = \frac{\gamma - \alpha x}{\beta}$; qui valor si in æquatione pro Cur-

va loco y substituatur, orietur æquatio tantum x continens, cujus radices reales præbebunt omnes Abscissas, quibus intersectiones respondent; ideoque intersectionum numerus colligetur ex numero radicum realium ipsius x , quas æquatio inventa suppeditat. Quoniam vero in valore ipsius $y = \frac{\gamma - \alpha x}{\beta}$, incognita x unicam tenet dimensionem, post substitutionem emerget æquatio, in qua x non plures habebit dimensiones, quam antea in æquatione pro Curva ambæ x & y conjunctim tenebant. Habebit ergo x vel totidem dimensiones vel pauciores, si quidem per substitutionem summæ ipsius x potestates tollantur.

461. Inventis hoc modo Abscissis AP , Ap , quæ intersectionibus respondent, ex iis ipsa intersectionum puncta M & m facile definiuntur. Cum enim Applicatæ in punctis P & p erectæ per intersectiones transeant, ea tantum puncta erunt notanda, ubi hæ Applicatæ rectam BMm secant. Notari quoque possent puncta, quibus istæ Applicatæ Curvæ AMm occurrunt; cum autem sæpenumero una Applicata Curvæ in pluribus punctis occurrat, incertum foret quodnam Curvæ punctum simul intersectionem sit præbiturum. Hoc autem incommodum usu non venit, si intersectiones ex recta BMm æstimentur; quippe a qua unaquæque Applicata non nisi in unico puncto secari potest. Quod si autem eveniat, ut duo ipsius x valores fiant inter se æquales, tum duo intersectionum puncta M & m in unum coalescent; quo ergo casu vel recta BM Curvam tanget, vel eam in puncto duplici secabit.

462. Si, eliminata incognita y , æquatio resultans qua x definitur, nullam habeat radicem realem, tum hoc erit indicium Curvam nusquam a recta BMm secari vel tangi; radices autem reales (quotquot fuerint) illius æquationis ostendent totidem intersectiones; quia unicuique Abscissæ reali una rectæ BMm Applicata realis responder; cui cum sit æqualis Ap-

LIB. II. plicata Curvæ, fieri non potest, quin ibi nulla existat inter-
 sectio. Hæc ideo isto loco probe sunt notanda, quod in in-
 terfectione Linearum curvarum non semper singulæ radices to-
 tidem interfectiones indicent; cujus ratio mox fiet manifesta,
 cum duas Lineas curvas contemplabimur, earumque interfe-
 ctiones investigabimus.

T A B.
 XXIII.
 Fig. 95.

463. Sint igitur descriptæ duæ Curvæ quæcunque ME_m ,
 MF_m , quæ se mutuo interfecerint; ad quarum interfectiones
 definiendas, natura utriusque exprimatur per æquationem inter
 Coordinatas orthogonales x & y ad eundem communem A-
 xem AB idemque Abscissarum initium A relatas. Sumtis
 ergo pro utraque Curva Abscissis x æqualibus, ubi dantur
 interfectiones, ibidem Applicatæ y convenient. Quocirca,
 si ex duabus Curvarum æquationibus propositis, eliminando
 y , formetur nova æquatio solam x tanquam incognitam in-
 volvens, interfectiones omnes M, m, m , quotquot fuerint,
 indicabuntur per radices reales istius æquationis; scilicet, Abs-
 cissæ AP, Ap, Ap , &c. quæ interfectionibus M, m, m , &c.
 respondent, erunt valores ipsius x convenientes pro illa æ-
 quatione.

464. Inventis autem Abscissis his AP, Ap &c., quæ in-
 terfectionibus conveniunt, non tam facile erit ipsa interfectio-
 num puncta definire. Si enim pro utraque Curva eidem Abs-
 cissæ AP plures Applicatæ respondeant, quod evenit, si pro
 utraque Curva fuerit y Functio multiformis ipsius x , tum ex
 hac duplici Applicatarum multitudine eas, quæ sint inter se
 æquales, eligi oportet: quæ investigatio eo erit molestior,
 quo plures valores Applicata y in utraque Curva obtineat.
 Hic tamen difficultati facile occurreret, si, dum ex binis æ-
 quationibus propositis Applicata y eliminatur, ea æquatio in
 subsidiam vocetur, qua y per x definitur; ex hac enim æ-
 quatione pro quovis ipsius x valore invento cognoscetur ma-
 gnitudo Applicatæ ex puncto P ad interfectionem usque per-
 tingentis; neque ad hoc opus erit, naturam alterutrius vel
 adeo utriusque Curvæ perpendisse.

465. Sit una Curva Parabola, cujus natura hac exprimitur æquatione $yy - 2xy + xx - 2ax = 0$; altera vero sit Circulus æquatione $yy + xx - cc = 0$, expressus. Ad y eliminandum subtrahatur primum prior æquatio a posteriori, ac remanebit

$$2xy + 2ax - cc = 0, \text{ unde fit } y = \frac{cc - 2ax}{2x}$$

ex qua jam patet, quicumque valores pro x resultent, iis semper valores ipsius y reales repertum iri. Substituatur ergo iste valor pro y inventus in altera æquatione, ac prodibit

$$c^4 - 4accx + 4(aa - cc)xx + 4x^4 = 0,$$

cujus adeo æquationis singulæ radices reales præbebunt intersectiones veras. Ponamus esse $c = 2a$ ideoque

$$4a^4 - 4a^3x - 3aaxx + x^4 = 0,$$

cujus æquationis una radix est $x = 2a$, qua extracta remanebit hæc æquatio

$$x^3 + 2axx + aax - 2a^3 = 0,$$

quæ unam adhuc præbet radicem realem; utrique autem Applicata conveniens invenitur ex hac æquatione $y = \frac{2aa - ax}{x}$, priori scilicet $x = 2a$, respondebit $y = 0$, ita ut intersectio in ipso fiat Axe.

466. Hinc intelligitur quoties ambæ æquationes inter x & y ita fuerint comparatæ, ut in negotio eliminationis ipsius y inveniatur Functio rationalis ipsius x quæ æqualis sit ipsi y ; tum unamquamque radicem realem ipsius x , quam ultima æquatio, (postquam y penitus est eliminata,) præbebit, exhibituram esse intersectionem veram. Verum, si inter eliminandum nulla inveniatur Functio rationalis ipsius x , quæ æqualis sit ipsi y ; tum evenire potest, ut non omnes radices reales ex ultima

LIB. II. æquatione erutæ præbeant interfectiones veras. Tantus enim subinde valor pro x prodire potest, cui in neutra Curva Applicata realis respondeat; neque tamen hoc casu calculus erroris est arguendus. Cum enim hujusmodi Abscissæ pro utraque Curva Applicata imaginaria respondeat, in imaginariis autem æqualitas & inæqualitas æque locum habeat atque in realibus; nihil impedit, quo minus Applicatæ illæ imaginariæ inter se sint æquales, ideoque interfectionem mentiantur.

T A B. 467. Ad hoc clarius ostendendum, describantur super eodem Axe BAE Parabola EM Parametri $= 2a$, & extra eam Circulus AmB Radii $= c$; existente intervallo $AE = b$; ita ut certum sit nullam prorsus dari interfectionem. Sumatur A pro Abscissarum initio, quæ versus E affirmativæ, retro autem versus B negativæ statuatur; atque, pro Parabola habebitur hæc æquatio $yy = 2ax - 2ab$; pro Circulo vero hæc $yy = -2cx - xx$. Quod, si jam, quasi interfectionem indagare velimus, eliminemus y , statim habebimus $xx + 2(a+c)x - 2ab = 0$, ex qua duo pro x valores reales reperiuntur, nempe

$$x = -a - c \pm \sqrt{(a+c)^2 + 2ab}.$$

alter affirmativus, alter negativus; cum tamen nulla existat interfectio. Pro his scilicet duabus Abscissis tam Parabola quam Circulus exhibebit Applicatas imaginarias, quæ, utut imaginariæ, tamen inter se erunt æquales: fiet autem hoc ipsius x valore substituto

$$y = \sqrt{(-2aa - 2ac - 2ab \pm 2a\sqrt{(aa + 2ac + cc + 2ab)})}$$

quæ expressio utique est imaginaria.

468. Ex hoc exemplo intelligitur dari etiam Curvarum interfectiones imaginarias; quæ, etiamsi sint nullæ, tamen per calculum æque indicentur ac reales. Atque hanc ob rem ex numero radicum realium ipsius x , quas ultima æquatio continet, non semper interfectionum numerus recte concludetur; fieri enim potest ut plures radices reales adsint quam interfectiones,

sectiones, atque etiam nulla omnino existat intersectio; cum tamen duæ pluresve radices reales ipsius x resultent. Interim tamen quælibet intersectio semper unam inducet radicem realem ipsius x in æquationem ultimam; & hanc ob rem semper tot, ad minimum, erunt radices reales ipsius x , quot sunt intersectiones, etiamsi interdum plures radices reales affuerint. Utrum autem unicuique radici reali ipsius x intersectio realis respondeat facile perspicietur, si valor ipsius y respondens quærat, qui si prodeat realis, intersectio erit realis, sin sit imaginarius, intersectio quoque erit imaginaria vel nulla.

469. Hæc igitur exceptio seu differentia inter radicum realium ipsius x & intersectionum numerum tantum locum habet, si vel in utraque æquatione Applicata y pares tantum ubique habeat dimensiones, atque adeo Axis principalis simul sit utriusque Curvæ Diameter; vel si ambæ æquationes ita fuerint comparatæ, ut, dum eliminatur yy , simul y ex calculo excedat; sicque y per Functionem rationalem ipsius x exprimi nequeat. Sic, si altera æquatio fuerit $y^2 - xy = aa$, altera vero $y^4 - 2xy^3 + x^3y = bbxx$; cum ex priori sit $(yy - xy)^2 = a^4$, seu $y^4 - 2xy^3 = a^4 - xxyy$, substituatur hic valor in altera, eritque $a^4 - xxyy + x^3y = bbxx$, seu $yy - xy = \frac{a^4 - bbxx}{xx} = aa$: unde fit $xx = \frac{a^4}{aa + bb}$ ideoque $x = \frac{\pm aa}{\sqrt{(aa + bb)}}$. Videtur ergo dari duplex intersectio, sed an utraque sit realis ex valore ipsius y colligi debet, quem hæc æquatio $yy - xy = aa$ suppeditat. Erit ergo

$$yy = \frac{\pm aay}{\sqrt{(aa + bb)}} + aa, \text{ cujus cum omnes radices sint reales,}$$

patet quatuor dari intersectiones, ita ut utrique Abscissæ $x =$

$$\frac{\pm aa}{\sqrt{(aa + bb)}} \text{ binæ intersectiones reales respondeant.}$$

470. Quando autem neque Axis utriusque Curvæ Diameter existit, neque iste casus locum habet, ut dum altiores ipsius y potestates eliminantur, simul y prorsus eliminetur; tum,

L I B. II. quia ad Functionem rationalem ipsius x pervenietur ipsi y æqualem, singulæ radices reales ultimæ æquationis totidem indicabunt intersecciones veras, ita ut his casibus nulla cautio sit opus. Evenit hoc, si altera Curva abeat in rectam, uti ante vidimus, vel, si ejus Applicata exprimat per Functionem uniformem ipsius x ; tum enim nulli Abscissæ respondebit Applicata imaginaria; ideoque singulæ radices ipsius x exhibebunt intersecciones veras. Plerumque autem, etiamsi y in utraque æquatione plures obtineat dimensiones, tamen inter eliminationem ipsius y , perveniri solet ad æquationem, qua valor ipsius y per Functionem rationalem, ideoque uniformem, ipsius x exprimitur.

471. Quoties autem accidit, ut aliquot intersecciones quas calculus exhibet, sint imaginariæ, id non solum iis evenit casibus, quando neutra Curva habet Applicatam realem illi Abscissæ inventæ respondentem; quod quidem factum est in superiori Circuli & Parabolæ exemplo. Sed etiam ejusmodi casus exhiberi possunt, quibus una Curva pro omnibus Abscissis præbet Applicatas reales, neque tamen singulis radicibus realibus ipsius x intersecciones respondeant. Hujusmodi exemplum præbet Linea tertii ordinis, hac æquatione expressa

$$y^3 - 3ayy + 2aay - 6axx = 0,$$

quæ pro omnibus Abscissis reales præbet Applicatas; & quidem ternas si fuerit x minor quam $\frac{a}{3} \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$. Quod, si cum hac Curva combinetur Parabola æquatione $yy - 2ax = 0$, contenta, cujus nulla datur Applicata realis, si x sit negativum, ideoque Abscissis x negativis nulla intersectio convenire potest.

472. Eliminetur jam y : & cum sit ex æquatione posteriori $yy = 2ax$, prior æquatio abibit in hanc

$$2axy - 6aax + 2aay - 6axx = 0, \text{ unde fit}$$

$y =$

$y = \frac{6ax + 6axx}{2aa + 2ax} = 3x$. Quoniam vero illa æquatio est divisibilis per $y - 3x$; si dividatur, orietur æquatio ab y libera hæc $2aa + 2ax = 0$, unde oritur $x = -a$. Deberet ergo esse intersecctio Curvarum respondens Abscissæ $x = -a$, cui in Parabola nulla Applicata realis respondet: in Linea autem altera tertii ordinis, posito $x = -a$, fit $y^3 - 3ayy + 2aay - 6a^3 = 0$, ex qua una nascitur Applicata realis, $y = 3a$, reliqui duo ipsius y valores in æquatione $yy + 2aa = 0$, contenti sunt imaginarii; hoc scilicet loco Applicatæ istæ imaginariæ æquales fiunt Applicatis Parabolæ imaginariis eodem hoc loco; sicque habebuntur duæ intersecctiones imaginariæ. Habebuntur vero etiam duæ intersecctiones reales ex superioris æquationis Factore $y - 3x = 0$, oriundæ; ex qua fit $9xx - 2ax = 0$. Primum ergo in ipso Abscissarum initio, ubi $x = 0$, simulque $y = 0$, existit intersecctio, altera respondet Abscissæ $x = \frac{2a}{9}$, ubi est $y = 3x = \frac{2a}{3}$.

473. Hoc igitur casu perventum est ad intersecctiones imaginarias, etiamsi in negotio eliminationis ipsius y , prodierit æquatio $2axy - 6aax + 2aay - 6aaxx = 0$, in qua y unicam tantum obtinet dimensionem, ita ut inde y per Functionem rationalem ipsius x exprimi posse videatur, quod ante tanquam criterium nullarum intersecctioinum imaginariarum annotavimus. Atque revera, si hæc æquatio nullos haberet divisores, intersecctioinibus imaginariis nullus locus relinqueretur, quoniam vero hoc casu per divisionem elicitur æquatio Applicatam y non amplius involvens, perinde est, ac si y per Functionem rationalem ipsius x exprimi non posset. Quoties scilicet hujusmodi æquatio in Factores est resolubilis, pro unoquoque Factore seorsim judicium est ferendum, unde fit, ut, dum alter Factor intersecctiones imaginarias penitus respuit, alter easdem admittat.

474. His perpensis, ostendamus aliquanto distinctius, quemadmodum

L1B. II. admodum duabus quibusvis Curvis propositis earum interse-
ctiones definiri debeant : atque , cum hæc investigatio ab eli-
minatione alterius Coordinatæ y pendeat , ad hujus tantum
dimensiones , quas in utraque æquatione obtinet , erit respi-
ciendum. Eliminatio enim eodem modo absolvetur , utcun-
que altera Coordinata x utramque æquationem afficiat. Sint
igitur P, Q, R, S, T &c. , itemque p, q, r, s, t &c. ,
Functiones quæcunque rationales ipsius x : ac primo quidem
ponamus ambas Curvas , quarum interseccionem requiruntur ,
exprimi his æquationibus

$$\begin{array}{l} \text{I.} \\ P + Qy = 0 \\ \text{II.} \\ p + qy = 0 \end{array}$$

multiplicetur prior æquatio per p , posterior per P ; atque hæ
æquationes a se invicem subductæ relinquent hanc æquationem
ab y prorsus liberam :

$$pQ - Pq = 0.$$

Hujus igitur æquationis , in qua sola incognita x , præter con-
stantes , inest , omnes radices reales ipsius x præbebunt puncta
in Axe , quibus interseccionem imminent. Pro quocunque va-
lore ipsius x invento habebitur valor ipsius y realis ex alteru-
tra æquatione $y = \frac{-P}{Q} = \frac{-p}{q}$, qui interseccionem indica-
bit ; unde , si utriusque Curvæ Applicata y exprimat per Fun-
ctionem rationalem seu uniformem ipsius x , nullæ interse-
ccionem imaginariæ locum inveniunt.

475. Exprimat jam alterius Curvæ Applicata y per Fun-
ctionem uniformem ipsius x ut ante ; alterius vero per Fun-
ctionem biformem , ita ut sit

$$P + \overset{\text{I.}}{Q}y = 0$$

$$p + qy + ryy = 0,$$

multiplicetur prior æquatio per p , posterior per P , & a se invicem subtrahantur, factaque divisione per y , erit

$$pQ - Pq - \overset{\text{I I I.}}{Pr}y = 0,$$

seu

$$(Pq - pQ) + Pr y = 0.$$

Nunc multiplicetur prima per Pr , & tertia per Q ; atque, facta subtractione, emerget hæc æquatio ab y libera.

$$PPr - PQq + pQQ = 0.$$

Hujus æquationis ergo singulæ radices præbebunt Abscissas interfectionibus respondentes, quibus cum Applicatæ reales

$y = \frac{-P}{Q} = \frac{pQ - Pq}{Pr}$ conveniant, interfectiones erunt reales.

476. Sit, ut ante, alterius Curvæ Applicata æqualis Functioni uniformi ipsius x ; alterius vero Curvæ Applicata exprimitur per æquationem cubicam; seu, sit Functio triformis ipsius x , ita ut binæ æquationes propositæ sint hujusmodi:

$$P + \overset{\text{I.}}{Q}y = 0$$

$$p + qy + ryy + sy^3 = 0.$$

Multiplicetur prior per p & posterior per P ; alteraque ab altera subducta ac divisione per y facta, erit

$$(Pq - pQ) + Pr y + P s y y = 0,$$

LIB. II. in qua si loco y valor ex prima $y = \frac{-P}{Q}$ substituatur & a fractionibus liberetur, proveniet ista æquatio

$$PQQq - pQ^3 - P^2Qr + P^3s = 0,$$

feu

$$Q^3p - PQ^2q + P^2Qr - P^3s = 0,$$

quæ eadem statim prodit, si in secunda æquatione loco y ejus valor ex prima $\frac{-P}{Q}$ substituatur. Hujus ergo ultimæ æquationis omnes radices reales ipsius x , quoniam singulis per primam æquationem $y = \frac{-P}{Q}$ Applicatæ reales respondent, totidem intersecciones veras monstrabunt.

477. Simili modo, si alterius Curvæ Applicata y exprimat per æquationem quatuor pluriumve dimensionum, dum alterius Applicata manet Functio uniformis seu rationalis ipsius x , facile incognita y eliminatur. Sint enim ambæ æquationes propositæ

$$\begin{array}{c} \text{I.} \\ P + Qy = 0 \\ \text{II.} \\ p + qy + ry^2 + sy^3 + ty^4 = 0; \end{array}$$

atque, cum ex priori fit $y = \frac{-P}{Q}$, hic valor in altera substitutus dabit æquationem inter x & cognitæ tantum hanc

$$Q^4p - PQ^3q + P^2Q^2r - P^3Qs + P^4t = 0.$$

Hujus ergo æquationis singulæ radices ipsius x reales suppetabunt totidem intersecciones veras; propterea quod unicuique Abscissæ x ex prima æquatione assignari potest una Applicata y realis, nempe $y = \frac{-P}{Q}$.

478. Exprimatur jam utriusque Curvæ Applicata y per æquationem

quationem quadraticam; ac primo quidem puram, ita ut æquationes ambæ sint hujusmodi

$$\begin{array}{l} \text{I.} \\ P + Ryy = 0 \\ \text{I I.} \\ p + ryy = 0 \end{array}$$

ex quibus, eliminando yy , statim obtinetur hæc æquatio,

$$Pr - Rp = 0,$$

cujus singulæ radices reales tum solum demonstrant interfectiones veras, si valores ipsius x inventi ita fuerint comparati, ut

$\frac{-P}{R}$ vel $\frac{-p}{r}$ fiat quantitas affirmativa; tum enim, ob $yy =$

$\frac{-P}{R} = \frac{-p}{r}$, Applicata y duplicem nanciscetur valorem rea-

lem, alterum affirmativum alterum negativum; ideoque cuique Abscissæ x valori ex æquatione $Pr - Rp = 0$, invento, binæ respondebunt interfectiones, ab Axe utrinque æqualiter distantes, quod, cum Axis utriusque Curvæ Diameter existat, aliter evenire non potest. Quod si autem quis valor ipsius x ex æquatione $Pr - Rp = 0$, inventus expressionibus

$\frac{-P}{R} = \frac{-p}{r}$ inducat valorem negativum; tum, ob y imaginarium, interfectiones quoque erunt imaginariæ.

479. Adsit nunc in utraque æquatione proposita quadratica secundus quoque terminus continens y , sintque ambæ æquationes propositæ istæ

$$\begin{array}{l} \text{I.} \\ P + Qy + Ryy = 0 \\ \text{I I.} \\ p + qy + ryy = 0 \end{array}$$

Ad incognitam y ex his æquationibus eliminandam multiplicetur primum illa æquatio per p , hæc vero per P , factaque subtractione & divisione per y , erit

K k 2

III.

LIB II.

III.

$$(Pq - Qp) + (Pr - Rp)y = 0.$$

Deinde multiplicetur prior æquatio per r , posterior vero per R , alteraque ab altera subtracta habebitur

IV.

$$(Pr - Rp) + (Qr - Rq)y = 0.$$

Cum igitur ex his duabus æquationibus sit

$$y = \frac{Qp - Pq}{Pr - Rp} = \frac{Rp - Pr}{Qr - Rq}$$

erit

$$(Qp - Pq)(Qr - Rq) + (Pr - Rp)^2 = 0,$$

seu

$$P^2r^2 - 2PRpr + R^2p^2 + Q^2pr - PQqr - QRpq + PRq^2 = 0.$$

Cujus æquationis singulæ radices reales ostendent totidem intersectiones veras, si quidem cuique valori ipsius x valor realis ipsius y convenit ex æquatione III. vel IV. Interim tamen fieri potest, ut intersectiones sint imaginariæ, quod evenit si æquationes III. & IV. habeant Factores; ita ut ex iis jam per divisionem æquatio ab y libera elici queat. Tum enim hæc æquatio in locum ultimæ substitui, arque ad valores ipsius x inde erutos ex primis æquationibus valores ipsius y respondentis quæri debebunt; qui si fuerint imaginarii, hoc erit indicio intersectiones esse imaginarias.

480. Sit porro in una Curva Applicata y Functio biformis, in altera autem triformis ipsius x ; seu, sint ambæ Curvarum æquationes propositæ hæc

I.

$$P + Qy + Ryy = 0$$

II.

$$p + qy + ryy + sy^3 = 0.$$

Multiplicetur prior per p , posterior per P , alteraque ab altera subtracta remanebit

III.

III.

$$(Pq - Qp) + (Pr - Rp)y + Pyy = 0,$$

quæ cum prima conjuncta exhibet casum in præcedente paragrapho pertractatum; ita ut, quæ ibi erant p, q, r , hic sint $Pq - Qp, Pr - Rp, & Pp$: ideoque reperietur hic

$$y = \frac{PQq - QQp - PPr + PRp}{PPs - PRq + QRp},$$

$$y = \frac{PRq - QRp - PPs}{PQs - PRr + RRp};$$

unde fit

$$0 = (PRq - QRp - PPs)^2 + (PQs - PRr + RRp)(PQq - Q^2p - P^2r + PRp),$$

quæ æquatio evoluta dat

$$\begin{aligned}
 & + 3P^2QRps - PQR^2pq \\
 P^4s^2 - 2P^3Rqs + P^2R^2qq - PQ^3ps + Q^2R^2p^2 = 0 \\
 & + P^3Rr - P^2QRqr + PQ^2Rpr - Q^2R^2p^2 \\
 & - 2P^2R^2pr + PR^3pp
 \end{aligned}$$

quæ, ob ultimum terminum evanescentem, divisibilis est per P , sicque prodibit hæc æquatio

$$+P^3s^2 - 2P^2Rqs - P^2QRs + 3PQRps + PQ^2qs - Q^3ps + R^3p^2 + P^2Rr^2 - PQRqr - 2PR^2pr + Q^2Rpr + PR^2q^2 - QR^2pq = 0.$$

Ex cujus æquationis radicibus realibus intersectiones cognoscantur, si quidem ipsis valores reales ipsius y respondereprehendantur.

481. Exprimatur nunc utraque Applicata per æquationem cubicam, sintque ambæ æquationes propositæ hæ

$$I. \quad P + Qy + Ryy + Sy^3 = 0$$

$$II. \quad p + qy + ryy + sy^3 = 0.$$

K k 3

Multipli-

LIB. II. Multiplicetur prior per p , posterior per P , factaque subtractione alterius ab altera, remanebit

III.

$$(Pq - Qp) + (Pr - Rp)y + (Ps - Sp)yy = 0.$$

Deinde multiplicetur prior per s , posteriorque per S , factaque subtractione remanebit

IV.

$$(Sp - Ps) + (Sq - Qs)y + (Sr - Rs)yy = 0.$$

Hæ æquationes III. & IV. si comparentur cum binis æquationibus §. 479. tractatis, fiet ut sequitur

$$\begin{array}{l|l} P = Pq - Qp & p = Sp - Ps \\ Q = Pr - Rp & q = Sq - Qs \\ R = Ps - Sp & r = Sr - Rs \end{array}$$

Quibus in æquatione finali substitutis, emerget

$$\begin{aligned} &+ (Pq - Qp)^2 (Sr - Rs)^2 - 2(Pq - Qp)(Ps - Sp)(Sp - Ps)(Sr - Rs) \\ &+ (Ps - Sp)^2 (Sp - Ps)^2 + (Pr - Rp)^2 (Sp - Ps)(Sr - Rs) - \\ &\quad (Pq - Qp)(Pr - Rp)(Sq - Qs)(Sr - Rs) - (Pr - Rp)(Ps - Sp) \\ &\quad (Sp - Ps)(Sq - Qs) + (Pq - Qp)(Ps - Sp)(Sq - Qs)^2 = 0. \end{aligned}$$

In hac æquatione septem sunt termini, qui omnes sunt divisibiles per $Sp - Ps$, præter primum & quintum: qui autem, si conjungantur, duos habebunt Factores, alterum $(Pq - Qp)(Sr - Rs)$, alterum vero $Pq - Qp)(Sr - Rs) - (Pr - Rp)(Sq - Qs)$, qui posterior resolutus fit $= PQRs + RSpq - PRqs - QSpr$ ideoque, $= (Sp - Ps)(Rq - Qr)$: unde termini I. & V. coalescent in hanc formam $(Pq - Qp)(Sr - Rs)(Sp - Ps)(Rq - Qr)$ quoque per $Sp - Ps$ divisibilem. Quocirca orietur hæc æquatio

$$0 = (Pq - Qp)(Sr - Rr)(Rq - Qr) + 2(Pq - Qp)(Sp - Ps)(Sr - Rr) + (Sp - Ps)^2 + (Pr - Rp)^2(Sr - Rr) + (Pr - Rp)(Sp - Ps)(Sq - Qs) - (Pq - Qp)(Sq - Qs)^2$$

C A P.
X I X.

quæ evoluta dabit

$$+ S^3p^3 - 3PS^2p^2s + P^2Sr^3 + 2PR^2prs - P^2Rr^2s + P^2Qr^2s + PRSqqr - P^3s^3 + 3P^2Sp^2s - R^3p^2s - 2PRSpr^2 + R^2Sp^2r - RSSp^2q - QQRprs - PR^2qqs - PQSqrr + PQRqrs + 3PSSpqr - 3PPSqrs + PQSprs + Q^2Sprr + QRRpqs - QRSpqr - 3PQRpss + 3QRSpps - PRSpqs + 2P^2Rqss + 2PQSqq s - PSSq^3 - PQ^2qss - 2QS^2ppr - 2QQSppqs + Q^3pss + QS^2pqq = 0.$$

482. Quo methodus ista eliminandi y ex duabus æquationibus altiorum graduum clarius percipiatur, ponamus utramque æquationem propositam esse quarti ordinis

$$I. \quad P + Qy + Ry^2 + Sy^3 + Ty^4 = 0$$

$$II. \quad p + qy + ry^2 + sy^3 + ty^4 = 0,$$

multiplicetur æquatio prior per p , posterior per P , atque post subtractionem relinquetur

III.

$$(Pq - Qp) + (Pr - Rp)y + (Ps - Sp)y^2 + (Pt - Tp)y^3 = 0.$$

Deinde multiplicetur æquatio I. per t , posterior II. per T , & facta subtractione, remanebit

IV.

$$(Pt - Tp) + (Qt - Tq)y + (Rt - Tr)y^2 + (St - Ts)y^3 = 0.$$

Ponatur nunc brevitatis gratia

$$\begin{array}{l|l|l} Pq - Qp = A & Pt - Tp = a & Sq - Qs = \alpha \\ Pr - Rp = B & Qr - Tr = b & Rq - Qr = \beta \\ Ps - Sp = C & Rt - Tr = c & \\ Pt - Tp = D & St - Ts = d & \end{array}$$

ubi notandum est esse non solum $a = D$; sed esse quoque $Ad =$

L I B. I I.

$$\begin{aligned} A d - C b &= (P r - T p)(S p - Q r) = D \alpha \\ A c - B b &= (P r - T p)(R q - Q r) = D \beta. \end{aligned}$$

His ergo substitutionibus æquationes III. & IV. induent has formas

$$\begin{aligned} & \text{III.} \\ & A + B y + C y y + D y' = 0 \\ & \text{I V.} \\ & a + b y + c y y + d y' = 0. \end{aligned}$$

Nunc porro æquationes hæ multiplicentur respectivé per d & D , & a se invicem subtrahantur, prodibitque

$$\text{V.} \\ (A d - D a) + (B d - D b) y + (C d - D c) y^2 = 0.$$

Tum eædem illæ æquationes multiplicentur per a & A , & post subtractionem relinquetur

$$\text{V I.} \\ (A b - B a) + (A c - C a) y + (A d - D a) y^2 = 0.$$

Jam statuatur iterum brevitatis gratia

$$\begin{array}{l|l} A b - B a = E & A d - D a = e \\ A c - C a = F & B d - D b = f \\ A d - D a = G & C d - D c = g \end{array} \quad C b - B c = \zeta$$

eritque $G = e$; & $E g - F f = G \zeta$; ita ut & $E g - F f$ sit divisibile per G . Hinc sequentes habebimus æquationes

$$\text{V.} \\ E + F y + G y y = 0$$

$$\text{V I.} \\ e + f y + g y y = 0.$$

Ex quibus per similem operationem eliciuntur istæ

$$\text{V I I.} \\ (E f - F e) + (E g - G e) y = 0$$

$$\text{V I I I.} \\ (E g - G e) + (F g - G f) y = 0.$$

Denique

Denique iterum ponatur brevitatis gratia

C A P.
X I X.

$$\begin{array}{l} E f - F e = H \quad | \quad E g - G e = b \\ E g - G e = I \quad | \quad F g - G f = i \end{array}$$

ita ut sit $I = b$, habebiturque

V I I.

$$H + I y = 0$$

V I I I.

$$b + i y = 0,$$

ex quibus tandem colligitur hæc æquatio ab y libera

$$H i - I b = 0.$$

In qua si valores præcedentes successive restituantur, obtinebitur æquatio quam solæ Functiones P, Q, R, &c. $p, q, r, \&c.$, primarum æquationum ingredientur. Æquatio vero inter E, F, G, e, f, g divisibilis erit per $G = e$; atque, si procedatur ad litteras A, B, C, D, a, b, c, d , æquatio resultans divisionem admittet per $D^2 = a^2$, ita ut in æquatione ultima quivis terminus octo tantum complexurus sit litteras, quatuor majusculas, totidemque minusculas. Hoc itaque modo in genere, quotcunque dimensiones ipsius y utraque æquatio proposita contineat, semper incognita y poterit eliminari, atque æquatio, quæ solam incognitam x involvat, inveniri.

483. Etsi hujus methodi ex duabus æquationibus unam incognitam eliminandi usus latissime patet, tamen aliam adhuc methodum subjungam, quæ tot repetitis substitutionibus non indigeat. Sint igitur propositæ duæ æquationes quotcunque dimensionum

I.

$$P y^m + Q y^{m-1} + R y^{m-2} + S y^{m-3} + \&c. = 0$$

I I.

$$p y^n + q y^{n-1} + r y^{n-2} + s y^{n-3} + \&c. = 0,$$

LIB. II. ex quibus unam æquationem, in qua y amplius non inſit, conſtari oporteat. Ad hoc multiplicetur æquatio poſterior per hanc quantitatem

$P y^{k-n} + A y^{k-n-1} + B y^{k-n-2} + C y^{k-n-3} + \&c.$,
quæ $k - n$ litteras arbitrarias $A, B, C, \&c.$, continet. Æquatio vero prior multiplicetur per hanc quantitatem

$p y^{k-m} + a y^{k-m-1} + b y^{k-m-2} + c y^{k-m-3} + \&c.$,
in qua $k - m$ litteræ arbitrariæ $a, b, c, \&c.$, inſunt. Tum ambo producta ita inter ſe æqualia ponantur ut omnes termini qui continent poteſtates ipſius y ſe mutuo deſtruant, termini-que ultimi ipſa y carentes æquationem quæſitam exhibeant. Summæ autem poteſtates jam ſponte ſe deſtruunt, in utroque enim producto ſummus terminus erit $P p y^k$; ſuperſunt ergo adhuc $k - 1$ termini, qui deſtrui debent, ad quod totidem litteræ arbitrariæ ſunt determinandæ. Numerus autem litterarum arbitrariarum ſic intro ductarum eſt $2k - m - n$, qui cum æqualis eſſe debeat $k - 1$, fiet $k = m + n - 1$.

484. Hanc ob rem prima æquatio multiplicetur per hanc quantitatem indeterminatam

$$p y^{n-1} + a y^{n-2} + b y^{n-3} + c y^{n-4} + \&c.$$

ſecunda vero æquatio multiplicetur per hanc

$$P y^{m-1} + A y^{m-2} + B y^{m-3} + C y^{m-4} + \&c.$$

Singulisque terminis, in quibus ſimiles ipſius y occurrunt poteſtates, inter ſe coæquatis, naſcentur ſequentes æquationes

$$\begin{aligned} P p &= P p \\ P a + Q p &= p A + q P \\ P b + Q a + R p &= p B + q A + r P \\ P c + Q b + R a + S p &= p C + q B + r A + s P \\ &\&c. \end{aligned}$$

Hujus

Hujusmodi ergo æquationes, prima $Pp = Pp$ simul computata, habebuntur numero $m+n$, ex quibus si litteræ arbitrariæ $A, B, C, \&c. a, b, c, \&c.$ determinantur, ultima æquatio nonnisi litteras datas $P, Q, R, \&c. p, q, r, \&c.$ continebit, sicque quaesito satisfaciet.

485. Hæc autem litterarum arbitrariorum determinatio facilius expeditur, si membra uniuscujusque æquationis æqualia ponantur novis indeterminatis quantitatibus $\alpha, \beta, \gamma, \&c.$; quod ex sequenti exemplo clarius apparebit.

Sint propositæ hæ æquationes duæ

$$\begin{array}{l} \text{I.} \\ P\gamma^2 + Q\gamma + R = 0 \\ \text{II.} \\ p\gamma^3 + q\gamma^2 + r\gamma + s = 0, \end{array}$$

multiplicetur ergo prima per $p\gamma^2 + a\gamma + b$, & altera per $P\gamma + A$; prodibuntque hæ æqualitates

$$\begin{array}{l} Pp = Pp \\ Pa + Qp = pA + qP = \alpha \\ Pp + Qa + Rp = qA + rP = \epsilon \\ Qb + Ra = rA + sP \\ Rb = sA \end{array}$$

Æquatione prima identica omiffa, ex secunda fit

$$a = \frac{\alpha - Qp}{P}$$

$$A = \frac{\alpha - qP}{p}$$

Ex tertia vero obinebitur

$$b = \frac{\epsilon}{P} - \frac{Qa}{P} - \frac{Rp}{P} = \frac{\epsilon}{P} - \frac{\alpha Q}{P^2} + \frac{Q^2 p}{P^2} - \frac{Rp}{P}$$

&

$$\beta = \frac{\alpha q}{p} - \frac{qqP}{p} + rP,$$

LIB. II.

quo valore ipsius β substituto, crit

$$b = \frac{\alpha q}{Pp} - \frac{qq}{p} + r - \frac{\alpha Q}{P^2} + \frac{Q^2 p}{P^2} - \frac{Rp}{P},$$

$$\text{feu}$$

$$b = \frac{\alpha(Pq - Qp)}{P^2 p} + \frac{(Q^2 p^2 - P^2 q^2)}{P^2 p} + \frac{(Pr - Rp)}{P},$$

qui valor, in quarta æquatione substitutus, dabit

$$\frac{\alpha Q(Pq - Qp)}{P^2 p} - \frac{Q(Pq - Qp)(Qp + Pq)}{P^2 p} + \frac{Q(Pr - Rp)}{P} +$$

$$\frac{\alpha R}{P} - \frac{RQp}{P} = \frac{\alpha r}{p} - \frac{Prq}{p} + P_s,$$

feu, per $P^2 p$ multiplicando,

$$\alpha Q(Pq - Qp) + \alpha P(Rp - Pr) - Q(Pq - Qp)(Pq + Qp) +$$

$$PQp(Pr - 2Rp) + P^3 qr - P^3 p_s = 0.$$

Ergo fiet

$$\alpha = \frac{P^2 Q q^2 - Q^2 p p - P^2 Q p r + 2 P Q R p^2 - P^3 q r + P^3 p_s}{P^2 Q q - Q^2 p + P R p - P^2 r}.$$

Ultima vero æquatio dabit

$$\frac{\alpha R(Pq - Qp)}{P^2 p} - \frac{R(P^2 q^2 - Q^2 p^2)}{P^2 p} + \frac{R(Pr - Rp)}{P} =$$

$$\frac{\alpha S}{P} - \frac{P q_s}{P},$$

ex qua quoque elicitur

$$\alpha = \frac{P^2 R q^2 - Q^2 R p^2 - P^2 R p r + P R^2 p^2 - P^3 q_s}{P R q - Q R p - P^2 s},$$

qui gemini ipsius α valores præbebunt æquationem quæsitam, quæ tandem reducetur ad eandem formam, quam supra §. 480. pro eodem casu invenimus.

CAPUT XX.

CAP.
XX.*De Constructione æquationum.*

486. **Q**Uæ in superiori Capite de interfectione Curvarum sunt exposita potissimum ad constructiones æquationum ariorum graduum traduci solent. Cum enim duabus Curvis propositis æquationem invenerimus, cujus radices interfectionum locos exhibeant; ita vicissim interfectiones duarum Curvarum inservire possunt radicibus æquationum indicandis. Atque hic modus maximam affert utilitatem si radices cujuscumque æquationis per Lineas exprimi debeant; descripta namque utraque Curva ad hunc finem accommodata, interfectiones facile notabuntur, unde si ad Axem Applicatæ demittantur, Abscissæ præbent veras æquationis radices. Si autem incommodum supra memoratum locum habeat, tum quidem omnes Abscissæ sic inventæ radices præbent, at fieri poterit ut æquatio proposita plures complectatur radices, quam per talem constructionem reperiuntur.

487. Cum igitur proposita fuerit æquatio algebraïca incognitam x involvens, cujus radices assignari oporteat, duæ quærendæ sunt Lineæ curvæ, seu duæ æquationes inter binas variables x & y , quæ ita sint comparatæ, ut, si ex iis Applicata y eliminetur, ipsa æquatio proposita resultet. Quo factò istæ duæ Curvæ super communi Axe atque ad idem Abscissarum initium describantur, punctaque, quibus se mutuo intersecabunt, notentur. Tum ex his interfectionum punctis ad Axem Applicatæ normales demittantur, quæ in Axe exhibebunt Abscissas singulis æquationis propositæ radicibus æquales. Hoc itaque modo singularum radicum quæstarum valores veri assignabuntur, nisi forte eveniat, ut æquatio plures contineat radices, quam interfectiones adesse deprehendantur.

LIB. II. 488. Antequam autem modum tradam, quo binæ illæ
 ——— Curvæ constructioni datæ æquationis inservientes inveniri que-
 ant, a posteriori eas æquationes perpendamus, quarum que-
 latio ex datis duabus Curvis absolvitur. Ac primo quidem
 TAB. XXIII. sint ambæ Lineæ resolventes rectæ EM , FM , sese in pun-
 Fig. 97. cto M interfecantes. Sumatur recta EF pro Axe, in eoque
 punctum A pro initio Abscissarum, unde educta normalis ABC
 rectam priorem in B , posteriorem in C secet. Sit $AE = a$,
 $AF = b$; $AB = c$; $AC = d$; tum vero ponatur Abscissa
 $AP = x$; Applicata $PM = y$; eritque pro priori recta EM
 $a : c = a + x : y$, seu $ay = c(a + x)$; & pro altera $b : d =$
 $b - x : y$, seu $by = d(b - x)$. Ex his æquationibus si
 eliminetur y , prodibit $bc(a + x) = ad(b - x)$ seu $x =$
 $\frac{abd - abc}{bc + ad} = \frac{ab(d - c)}{bc + ad}$. Per intersectionem ergo dua-
 rum Linearum rectarum construi poterit æquatio simplex $x =$
 $\frac{ab(d - c)}{bc + ad}$; ad quam formam omnes omnino æquationes
 simplices revocari possunt.

TAB. 489. Lineas rectas ratione facilitatis describendi excipit Cir-
 XXIII. culus, & hanc ob rem videamus cujusmodi æquationes per in-
 Fig. 98. terfectionem rectæ & Circuli construi queant. Sit igitur,
 sumta AP pro Axe & A pro Abscissarum initio, descripta
 Linea recta EM ; positisque $AE = a$, $AB = b$, & Coor-
 dinatis $AP = x$, $PM = y$; erit $a : b = a + x : y$; ideo-
 que $ay = b(a + x)$, quæ est æquatio pro Linea recta. Deinde
 fit Radius Circuli $CM = c$, demissoque ex ejus Centro C
 in Axem perpendicularo CD , vocetur $AD = f$, $CD = g$;
 erit $DP = x - f$, & $PM - CD = y - g$. Jam, cum
 sit ex natura Circuli $CM^2 = DP^2 + (PM - CD)^2$, erit
 æquatio pro Circulo $cc = xx - 2fx + ff + yy - 2gy + gg =$
 $(x - f)^2 + (y - g)^2$. At æquatio pro recta dat $y =$
 $\frac{ab + bx}{a}$, unde fit $y - g = \frac{a(b - g) + bx}{a} = b - g + \frac{bx}{a}$,
 quo

quo ipsius y valore in altera æquatione substituto, emerget CAP.
X X.

$$cc = xx - 2fx + ff + (b - g)^2 + \frac{2b(b - g)x}{a} + \frac{bbxx}{aa},$$

feu

$$+ \frac{aa}{bb}xx + \frac{2ab(b - g)}{2aaf}x + \frac{aa(b - g)^2}{aaff} = 0,$$

— $\frac{aacc}{aacc}$

cujus ergo æquationis radices inveniuntur per intersectiones Rectæ & Circuli, ita ut, demissis ex intersectionibus M & m in Axem perpendicularis MP , mp , valores ipsius x futuri sint AP & Ap .

490. Quoniam in hac æquatione omnes æquationes quadraticæ continentur, hinc constructio generalis æquationum quadraticarum adornari poterit. Sit scilicet proposita hæc æquatio quadratica

$$Axx + Bx + C = 0,$$

quæ ad superiorem formam primum ita reducatur ut primi termini convenient; multiplicando per $\frac{aa + bb}{A}$,

$$(aa + bb)xx + \frac{B(aa + bb)x}{A} + \frac{C(aa + bb)}{A} = 0.$$

Jam coæquatio reliquorum terminorum dabit

$$2Aab(b - g) - 2Aaaf = B(aa + bb)$$

ideoque fiet

$$af = b(b - g) - \frac{B(aa + bb)}{2Aa}.$$

Unde, cum fit

$$aa(b - g)^2 + aaff - aacc = \frac{C(aa + bb)}{A},$$

erit

$$(aa + bb)(b - g)^2 - \frac{Bb(b - g)(aa + bb)}{Aa} + \frac{BB(aa + bb)^2}{4A^2a^2} -$$

$$aacc = \frac{C(aa + bb)}{A}$$

ideoque

($b -$

$$\text{LIB. II. } (b - g)^2 = \frac{Bb(b - g)}{Aa} - \frac{B(aa + bb)}{4A^2a^2} + \frac{acc}{aa + bb} + \frac{C}{A}$$

$$\text{ergo } b - g = \frac{Bb}{2Aa} \pm \sqrt{\left(\frac{acc}{aa + bb} + \frac{C}{A} - \frac{B^2}{4AA} \right)}.$$

Manent igitur tres quantitates a , b , & c adhuc indeterminatæ, quas autem ita accipi oportet, ut $\frac{acc}{aa + bb} + \frac{C}{A} - \frac{B^2}{4AA}$, fiat quantitas affirmativa, quia alioquin $b - g = AB - CD$, hincque CD , fieret quantitas imaginaria.

491. Nihil ergo impedit quominus ponamus $b = 0$, eritque $g = \sqrt{\left(cc - \frac{BB + 4AC}{4AA} \right)}$ & $f = \frac{B}{2A}$. Deinde vero, cum æquatio proposita $Ax^2 + Bx + C = 0$, radices nullas habeat reales, nisi sit BB major quam $4AC$, erit hoc casu $\frac{BB - 4AC}{4AA}$ quantitas affirmativa, cui si cc ponatur æquale, ut sit $c = \frac{\sqrt{(BB - 4AC)}}{2A}$, fiet quoque $g = 0$, & a prorsus ex calculo excedit. Linea ergo recta EM in ipsum Axem AP incidet, & Centrum Circuli C collocari debet in puncto D existente $AD = \frac{B}{2A}$, ex quo Centro si Circulus describatur Radio $c = \frac{\sqrt{(BB - 4AC)}}{2A}$, hujus intersectiones cum ipso Axe ostendent æquationis propositæ radices. Ne autem ad hoc constructione formulæ irrationalis opus sit, ponatur $g = c - \frac{k}{2A}$, ut sit $cc - \frac{2ck}{2A} + \frac{kk}{4AA} = cc - \frac{BB + 4AC}{4AA}$, erit $c = \frac{kk + BB - 4AC}{4kA}$, & $g = \frac{BB - 4AC - kk}{4kA}$. In nostro ergo arbitrio determinatio quantitatis k relinquitur; qua utcuque assumpta, quia recta CM in ipsum Axem incidit, Circulus sequenti modo describi debet. Sumta $AD =$

$$\frac{B}{2A}$$

$\frac{-B}{2A}$, capiatur perpendicularum $CD = \frac{BB - 4AC - kk}{4Ak}$, & $\frac{C A P.}{X X.}$

Centro C describatur Circulus cujus Radius $= \frac{BB - 4AC + kk}{4Ak}$; hujusque interseciones cum Axe ostendent radices æquationis propositæ. Quod si ergo statuatur $k = -B$, sumta $AD = \frac{-B}{2A}$, capiatur $CD = \frac{C}{B}$, & Circuli Centro C describendi Radius erit $= \frac{-BB + 2AC}{2AB} = \frac{-B}{2A} + \frac{C}{B}$, ex quo Radius Circuli erit $= AD + CD$; quæ constructio pro præxi commodissima videtur.

492. Consideremus jam duos Circulos se interfecantes: sit que pro primo $AD = a$, $CD = b$, & ejus Radius CM $\frac{T A B.}{X X I V.}$ $= c$; eritque, positis $AP = x$ & $PM = y$, $DP = a - x$, $CD - PM = b - y$; ideoque, ex natura Circuli, habebitur $Fig. 99$

$$xx - 2ax + aa + yy - 2by + bb = cc.$$

Simili modo pro altero Circulo sit $Ad = f$, $dc = g$, ejusque Radius $cM = b$, eritque

$$xx - 2fx + ff + yy + 2gy + gg = hh,$$

quibus æquationibus a se invicem subtractis, remanebit

$$2(f - a)x + aa - ff - 2(b + g)y + bb - gg = cc - hh,$$

ergo

$$y = \frac{aa + bb - ff - gg - cc + hh - 2(a - f)x}{2(b + g)};$$

hincque

$$b - y = \frac{bb + 2bg - aa + ff + gg + cc - hh + 2(a - f)x}{2(b + g)},$$

&

$$a - x = \frac{2a(b + g) - 2(b + g)x}{2(b + g)}.$$

Cum igitur sit $(a - x)^2 + (b - y)^2 = cc$, erit, facta substitutione,

LIB. II.

$$\begin{array}{r} + 4(a-f)^2 \quad - 4(a+f)(b+g)^2 \quad + (b+g)^4 \\ + 4(b+g)^2 \quad \times x \quad - 4(a-f)(aa-ff)x \quad + 2(ff-bb)(b+g)^2 = 0. \\ + 4(a-f)(cc-bb) \quad + (aa-cc-ff+bb)^2 \end{array}$$

Hujus ergo æquationis ope infinitis modis construi poterit æquatio $Axx + Bx + C = 0$; simul vero intelligitur æquationem quadratica altiore per interfectionem duorum Circulorum construi non posse, propterea quod duo Circuli se mutuo in pluribus quam duobus punctis interfecare nequeunt. Cum igitur eadem æquatio quadratica construi possit per interfectionem Rectæ & Circuli, hæc constructio illi, quæ duos Circulos requirit, merito præfertur, nisi forte in casibus quibusdam singularibus facilis Linearum a, b, f, g, c & b determinatio sponte se prodat.

T A B.
XXIV.
Fig. 100.

493. Intersecetur nunc Circulus a Parabola: sit scilicet, demisso ex Centro Circuli C in Axem AP perpendicularo CD , $AD = a$, $CD = b$, & Radius Circuli $CM = c$, erit inter Coordinatas orthogonales $AP = x$, $PM = y$, æquatio pro Circulo $(x - a)^2 + (y - b)^2 = cc$. Parabolæ vero Axis FB statuatur ad Axem hic assumptum AP normalis: sitque $AE = f$, $EF = g$, & Parameter Parabolæ $= 2b$; erit, ex natura Parabolæ, $EP^2 = 2b(EF + PM)$, seu in symbolis $(x - f)^2 = 2b(g + y)$, unde erit $y = \frac{(x - f)^2}{2b} - g$ & $y - b = \frac{(x - f)^2}{2b} - (b + g)$. Qui valor si in priori æquatione substituatur, eliminabitur y , eritque

$$\frac{(x - f)^2}{4bb} - \frac{(b + g)(x - f)^2}{b} + (b + g)^2 + (x - a)^2 = cc$$

five

$$\begin{array}{r} + 6ff \quad - 4f^3 \quad + f^4 \\ + 4b(b+g)x^2 \quad + 4fb(b+g)x \quad + 4ffb(b+g) \\ + 4bb \quad - 8abb \quad + 4abb \\ - 4ccb \end{array} = 0$$

cujus

cujus æquationis radices erunt Abscissæ AP , Ap , Ap , Ap , CAP. unde Applicatæ per interfectionum puncta M , m , m , m , XX. transeunt.

494. In hac æquatione sex insunt constantes a , b , c , f , g , & h ; quarum vero binæ $b + g$ pro una sunt reputandæ, ita ut quinque solum, ponendo $b + g = k$, inesse censendæ sint. Posito scilicet $CD + EF = b + g = k$, sequens habebitur æquatio

$$x^4 - 4fx^3 + \frac{6ff}{4bk}xx - \frac{4f^3}{8abb} + \frac{f^4}{4ffbk} - \frac{4ffbk}{4bbkk} = 0.$$

$$+ \frac{4f^3}{8abb} + \frac{4f^4}{4aaab} - \frac{4cchb}{4cchb}$$

Ad hanc autem formam omnis æquatio biquadratica revocari potest; sit enim proposita hæc æquatio

$$x^4 - Ax^3 + Bxx - Cx + D = 0$$

erit, comparatione instituta,

$$4f = A \text{ seu } f = \frac{1}{4} A$$

$$6ff - 4bk + 4bb = B. \text{ seu } \frac{3}{8} AA - 4bk + 4bb = B,$$

unde fit

$$k = \frac{3}{32} \frac{AA}{b} + b - \frac{B}{4b},$$

$$4f^3 - 4fbk + 8abb = C$$

sive

$$\frac{1}{16} A^3 - \frac{3}{32} A^3 - Abb + \frac{1}{4} AB + 8abb = C$$

ergo

$$a = \frac{A^3}{256bb} + \frac{A}{8} - \frac{AB}{32bb} + \frac{C}{8bb}.$$

Denique est

$$(ff - 2bk)^2 + 4aabb - 4cchb = D.$$

At est

M m a

ff -

LIB. II.

$$ff - 2bk = \frac{B}{2} - 2bh - \frac{AA}{16},$$

&

$$2ah = \frac{A^3}{128b} + \frac{Ah}{4} - \frac{AB}{16b} + \frac{C}{4b},$$

quibus valoribus substitutis emerget æquatio c & h involvens, quas propterea convenientissime inde definiripotet, ita scilicet ut utraque valorem obtineat realem.

495. Quoniam vero in omni æquatione biquadratica secundus terminus facile tolli potest; ponamus ipsum jam esse sublatum, ideoque construendam esse hanc æquationem

$$x^4 + Bxx - Cx + D = 0.$$

Erit ergo primum, $f = 0$; secundo $k = h - \frac{B}{4b}$; tertio $a = \frac{C}{8bh}$; atque, ob $2bk - ff = 2bh - \frac{B}{2}$, & $2ah = \frac{C}{4b}$,

quarto $4h^4 - 2Bbh + \frac{1}{4}BB + \frac{CC}{16bh} - 4cchb = D$,

unde fit $64cch^4 = CC + 4BBbh - 32Bb^4 + 64b^6 - 16Dhb$;

ideoque $8cch = \sqrt{(4bh(B - 4bh))^2 + CC - 16Dhb}$.

Quoniam vero hoc imprimis est efficiendum ut tam c quam h obtineant valores reales, ponatur $c = h - \frac{B+q}{4b}$, eritque

$$CC - 16Dhb + 8Bbhq - 32b^4q - 4bhq^2 = 0.$$

Quo igitur quæsito satisfaciamus, duo casus sunt distinguendi, alter quo D est quantitas negativa, alter quo D est quantitas affirmativa. Sit igitur

I.

D quantitas affirmativa = + EE , ita ut construi debeat hæc æquatio

$$x^4 + Bx^2 - Cx + EE = 0,$$

ponatur ad hoc $q = 0$, ut sit $c = \frac{4bh - B}{4b}$, fietque $hb =$

CC

$$\frac{CC}{16EE} \ \& \ b = \frac{C}{4E}; \ \text{unde fit } c = \frac{CC - 4BE}{4CE}, \ \& \ \text{porro} \quad \text{CAP. XX.}$$

$$k = c = \frac{CC - 4BE}{4CE}; \ a = \frac{2EE}{C} \ \& \ f = 0.$$

I I.

Sit autem **D** quantitas negativa, puta $D = -EE$, ut construatur debeat hæc æquatio

$$x^4 * + Bx^2 - Cx - EE = 0,$$

fiet $64ccb^4 = CC + 4bb(4bb - B)^2 + 16EEbb$; quæ æquatio realem pro c valorem præbet, quicquid pro b assumatur:

$$\text{fiet enim } c = \frac{\sqrt{(CC + 4bb(4bb - B)^2 + 16EEbb)}}{8bb}, \ \text{atque } b \ \text{pro}$$

lubitu assumi potest; quovis igitur casu ita assumatur, ut facillima ipsius c constructio inde consequatur. Quo factò erit, ut ante, $AE = f = 0$, $CD + EF = k = \frac{4hb - B}{4b}$ &

$AD = a = \frac{C}{8bb}$. Si ponatur $E = 0$, oriatur constructio æquationis cubicæ

$$x^3 * + Bx - C = 0.$$

Hacque constructiõne nititur regula **BACKERI** vulgo satis nota.

496. Si sumantur duæ quæcunque Lineæ secundi ordinis seu Sectiones conicæ, quarum æquationes ad communem **Axem** idemque **Abscissarum** initium relatæ sint

$$ayy + byx + cxx + dy + ex + f = 0$$

&

$$ayy + byx + cxx + dy + ex + f = 0.$$

Ex quibus, si methodo supra tradita y eliminetur, quod fiet istas æquationes comparando cum illis in §. 479. tractatis, scilicet

$$P + Qy + Ryy = 0$$

&

$$p + qy + ryy = 0,$$

fient P & p Functiones secundi ordinis ipsius x , Q & q Functiones primi ordinis, & R & r erunt constantes, unde colligitur æquatio resultans fore biquadratica. Atque adeo per intersectiones duarum quarumvis Sectionum conicarum altioris gradus æquationes construi nequeunt, quam biquadratica, quas autem per Circulum & Parabolam construi posse vidimus. Hoc idem vero intelligere licet ex natura Linearum secundi ordinis, quæ a recta Linea in duobus punctis secari possunt; unde duæ rectæ quatuor intersectiones formare poterunt, at duæ Lineæ rectæ junctim consideratæ speciem constituunt Linearum secundi ordinis; unde patet duas Lineas secundi ordinis se mutuo in quatuor punctis interfecare posse.

497. Adhibeantur ad intersectiones efficiendas duæ Lineæ, altera secundi, altera vero tertii ordinis, quæ exprimentur his æquationibus

$$P + Qy + Ryy = 0$$

&

$$p + qy + ryy + sy^3 = 0.$$

Erit ergo P Functio duarum dimensionum ipsius x , Q Functio unius dimensionis, & R constans; tum vero p Functio trium dimensionum, q duarum, r unius dimensionis & s constans. Quarum ratio si in æquatione post eliminationem ipsius y orta (480.) habeatur, patebit eam fore ordinis sexti; quare per intersectiones Lineæ tertii ordinis cum Sectione conica altiores æquationes, quam sextæ potestatis construi non poterunt: quod idem ex natura utriusque ordinis patet, cum enim Lineæ tertii ordinis a Linea recta in tribus punctis interfecentur, eadem a duabus rectis, quæ junctim sumptæ speciem Linearum secundi ordinis constituunt, in sex punctis interfecantur

498. Si tam eliminationes supra expositas, quam hoc ratiocinium ab interfectione rectorum petitur, ad altiores ordines transferamus, patebit per interfectiones duarum Linearum tertii ordinis construere posse æquationes nonæ potestatis; per interfectiones duarum Linearum quarti ordinis autem æquationes potestatem sextam decimam non superantes. Atque in genere per duarum Linearum curvarum interfectiones, quarum altera sit ordinis m altera ordinis n , construere poterunt omnes æquationes potestatem mn non excedentes. Sic ad æquationem centesimæ potestatis construendam opus erit vel duabus Lineis decimi ordinis, vel duabus, quarum altera sit quinti altera vicesimi ordinis, & ita porro; resolvendo numerum 100. in duos Factores. Quod si autem æquationis construendæ maxima potestas exponatur numero primo, vel alio commodos Factores non admittente, tum in ejus locum alius numerus major Factores habens idoneos substituatur; quibus enim binis Curvis æquationes majoris potestatis construere possunt, iisdem quoque æquationes inferioris cujusque gradus construuntur. Sic ad æquationem gradus tricesimi noni adhiberi poterunt duæ Curvæ, altera sexti altera septimi ordinis; quia duabus hujusmodi Curvis æquatio quadragesimi secundi gradus construere potest, hæcque constructio simplicior est censenda, quam si altera Curva ordinis tertii, altera decimi tertii assumeretur.

499. Ex his igitur perspicuum est unamquamque æquationem pluribus, imo innumerabilibus, modis per interfectiones duarum Curvarum ita construere posse, ut ejus radices reales assignentur. Ex quibus infinitis modis cum potissimum eligi conveniet, qui absolvitur Lineis curvis cum simplicissimis tum descriptu facillimis; imprimis vero in id erit incumbendum, ut per interfectiones omnes radices reales exhibeantur; quod obtinetur, si ejusmodi Curvæ assumantur, quæ interfectionibus imaginariis careant. Supra autem vidimus hujusmodi interfectionibus imaginariis nullum relinqui locum, si in æquatione pro altera Curva Applicata y æquetur Functioni uniformi ipsius

LIB. II.

x ; tum enim, quia hæc Curva nullas habet Applicatas imaginarias, fieri nequit ut intersecciones imaginariæ oriuntur, quotcunque etiam Applicatis imaginariis altera Curva inquinetur. In hoc ergo constructionis negotio alteram Curvam perpetuo ita assumamus, ut ejus æquatio in hac forma $P + Qy = 0$, contineatur, denotantibus P & Q Functiones ipsius x .

500. Proposita ergo quacunque æquatione eligatur una quædam conveniens Curva in æquatione $P + Qy = 0$. Et, quoniam æquatio pro altera Curva ita debet esse comparata, ut, si in ea loco y substituatur valor $-\frac{P}{Q}$, ipsa æquatio proposita resultet; ex ipsa proposita vicissim efformari poterit æquatio pro altera Curva, introducendo y loco $-\frac{P}{Q}$. Uti, si proposita fuerit hæc æquatio $x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$, sumatur Parabola pro altera Curva æquatione $ay = xx + bx$ contenta; ex qua, cum sit $xx = ay - bx$, substituatur iste valor in æquatione proposita, quoties lubet; erit

$$\begin{aligned} x^4 &= aayy - 2abxy + bbxx \\ Ax^3 &= \quad \quad + Aaxy - Abxx \end{aligned}$$

ideoque obtinebitur hujusmodi æquatio secundi ordinis

$$aayy + a(A - 2b)xy + (B - Ab + bb)xx + Cx + D = 0,$$

cujus adeo intersecciones cum Curva $ay = xx + bx$ indicabunt radices æquationis propositæ.

501. Quemadmodum hæ Curvæ ambæ determinandis pro arbitrio constantibus a & b infinitis modis variari possunt, ita multo major adhuc varietas induci potest. Cum enim ex æquatione priori sit $xx - ay + bx = 0$; erit quoque $acxx - aacy + abcx = 0$, quæ si addatur ad posteriorem æquationem, multo latius patens orietur æquatio pro Linea secundi ordinis, cujus intersecciones cum priori radices æquationis propositæ æque indicabunt. Ambæ scilicet istæ Curvæ constructioni inservientes erunt

I.

I.

$$ay = xx + bx$$

I I.

$$aay + a(A - 2b)xy + (B - Ab + bb + ac)xx - aacy + (C + abc)x + D = 0,$$

hæcque posterior æquatio ita adornari potest, ut quamvis Sectionem conicam in se complectatur; attendendum scilicet est ad hanc quantitatem

$$AA - 4B - 4ac,$$

quæ si fuerit affirmativa, Curva erit Hyperbola; si fuerit $= 0$, Curva erit Parabola; sin autem sit quantitas negativa, Curva erit Ellipsis. Circulus vero erit hæc altera Curva si fuerit $b = \frac{1}{2}A$, & $aa = B - \frac{1}{4}AA + ac$, seu $c = a + \frac{AA}{4a} - \frac{B}{a}$: tum enim æquatio pro eo erit

$$aay + aaxx - (a^3 + \frac{AAa}{4} - Ba)y + (C + \frac{Aaa}{2} + \frac{A^3}{8} - \frac{AB}{2})x + D = 0,$$

feu

$$\left(y - \frac{a}{2} - \frac{1}{8} \frac{A}{a} + \frac{B}{2a}\right)^2 + \left(x + \frac{C}{2aa} + \frac{A}{4} + \frac{A^3}{16aa} - \frac{AB}{4aa}\right)^2 = \left(\frac{a}{2} + \frac{AA}{8a} + \frac{B}{2a}\right)^2 + \left(\frac{C}{2aa} + \frac{A}{4} + \frac{A^3}{16aa} - \frac{AB}{4aa}\right)^2 - \frac{D}{aa},$$

ubi hoc membrum est quadratum Radii Circuli.

502. Sic igitur ex solis Sectionibus conicis habentur innumerabiles Curvæ, quæ cum Parabola $ay = xx + bx$ descriptæ, intersectionibus suis radices æquationis propositæ præbent. Harum ergo Curvarum quæcunque sumatur, Parabola in iisdem semper punctis interfecabitur; atque ideo illæ Curvæ omnes se mutuo in iisdem punctis fecabunt. Quocirca ex his Curvis infinitis duas quascunque assumere licebit, (prætermissa Parabola primum assumpta,) quæ si super communi Axe describantur, per intersectiones suas radices æquationis propositæ semper indicabunt. Hocque adeo modo ista æquatio construi

Euleri *Introducti. in Anal. infin. Tom. II.*

N n poterit

LIB. II. poterit vel per Circulum & Parabolam, uti supra jam vidimus, vel per duas Parabolas, vel per Parabolam & Ellipsin, Hyperbolamve, vel per duas Ellipses, vel per duas Hyperbolas, vel per Ellipsin cum Hyperbola. Multo magis autem varietas constructionum multiplicabitur, si etiam Curvæ altiorum ordinum in hunc finem adhiberi velint.

503. Simili modo construui poterunt æquationes altiorum graduum, assumendo pro altera Curva Lineam parabolici generis æquatione $y = P$ contentam. Sic, si proposita sit æquatio construenda

$$x^{12} - f^{10}x^2 + f^9gx - g^{12} = 0,$$

sumatur æquatio Parabolica ordinis quarti $x^4 = a^3y$; & cum sit $x^{12} = a^9y^3$, hoc termino substituto emerget æquatio pro Linea tertii ordinis

$$a^9y^3 - f^{10}x^2 + f^9gx - g^{12} = 0;$$

ex qua, si ad eam addatur multiplum quodcumque prioris æquationis $x^4 - a^3y = 0$, innumerabiles formabuntur Lineæ quarti ordinis, quarum binæ quævis conjunctæ æquationem propositam constituent.

504. Quod si eveniat, ut ex æquatione construenda proposita non satis idonea constructio præcedente methodo derivari queat; tum æquatio proposita multiplicetur per x , vel x^2 , vel x^3 , vel altiore quampiam potestate ipsius x ; ita ut ad ejus radices aliquot insuper radices evanescentes addantur, quæ per intersectiones in ipso Abscissarum initio factas indicabuntur, ideoque a reliquis radicibus veris æquationis propositæ facile discernentur. Sic igitur æquatio proposita altioris sit gradus, hoc tamen non obstante sæpenumero commodior constructio obtinebitur. Ita, si exempli gratia proposita fuerit æquatio cubica

$$x^3 + Axx + Bx + C = 0;$$

quæ, posito $xx = ay$, ita ut altera Curva construens futura sit

fit Parabola, altera erit semper Hyperbola; prodibit enim, loco xx substituto ay , hæc æquatio

C A P.
X X.

$$axy + Ay + Bx + C = 0;$$

vel, addita æquatione priore $cx - ay = 0$, nascetur hæc latius patens

$$axy + cxx + a(A - c)y + Bx + C = 0,$$

quæ quoque perpetuo est pro Hyperbola. Quod si ergo Circulum vel Ellipsin vel Parabolam adhibere commodius videatur, tum æquatio proposita multiplicetur per x , ut habeatur hæc æquatio

$$x^2 + Ax^2 + Bxx + Cx = 0,$$

quæ, si cum æquatione biquadratica supra constructa comparatur, erit $D = 0$, hæcque æquatio semper per Circulum & Parabolam construi poterit.

505. Quoniam ergo omnis æquatio cujusque gradus per intersectiones duarum Curvarum algebraicarum construi potest, idque infinitis modis, Lineam quamcunque in locum alterius Curvæ substituere licebit: hincque enata est quæstio, quemadmodum data æquatio ope datæ Curvæ construi queat. Hic autem primum notandum est datam Curvam ex eo genere esse debere, ut ejus Applicata exprimatur per Functionem uniformem ipsius x , ne intersectiones imaginariæ constructionem perturbent. Neque enim sufficeret, ut Curva, vel tantum portio Curvæ proposita, habeat Abscissas uni radici æquationis æquales; quæ conditio, si quidem una tantum radix æquationis propositæ desideretur, adjici est solita; fieri enim posset, ut iste arcus Curvæ nullam patiatur intersectionem, etiamsi Abscissa cuiusdam ipsius puncto respondens sit vera radix; quoniam hæc radix vel per intersectionem imaginariam, vel per alius rami eidem Abscissæ respondentis intersectionem

LIB. II. indicari possent. Quid ob causam huic quæstioni, curiosæ magis quam utili, non immoror, cum vera fundamenta omnium hujusmodi constructionum satis fuisse ostenderit.

CAPUT XXI.

De Lineis curvis transcendentibus.

506. **H**ætenus de Lineis curvis algebraicis egimus, quæ ita sunt comparatæ, ut, sumtis Abscissis in Axe quocunque, Applicatæ respondentes exprimantur per Functiones algebraicas Abscissarum; seu, quod eodem redit, in quibus relatio inter Abscissas & Applicatas exprimi possit per æquationem algebraicam. Hinc itaque sponte sequitur, si valor Applicatæ per Functionem algebraicam Abscissæ explicari nequeat, Lineam curvam algebraicis annumerari non posse. Hujusmodi autem Lineæ curvæ, quæ algebraicæ non sunt, *transcendentes* vocari solent. Linea igitur transcendens ita definitur, ut ejusmodi Curva esse dicatur, in qua relatio inter Abscissas & Applicatas æquatione algebraica exprimi nequeat. Quoties ergo Applicata y Functioni transcendententi ipsius Abscissæ x æquatur, toties Linea curva ad genus transcendentium erit referenda.

507. In superiori Sectione duas potissimum species quantitatum transcendentium evolvimus, quarum altera Logarithmos, altera Arcus circulares seu angulos, complectebatur. Quod si ergo Applicata y sit æqualis vel Logarithmo ipsius Abscissæ x , vel Arcui Circuli, cujus sinus, seu cosinus, seu tangens per Abscissam x exprimitur, ita ut sit $y = lx$, vel $y = A.\sin.x$, vel $y = A.\cos.x$, vel $y = A.\tan.x$, vel, si hujusmodi valores tantum in æquationem inter x & y ingredientur, tum Curva erit transcendens. Sunt autem hæ Curvæ tantum species transcendentium: præter istas enim dantur innumerabiles aliæ expressiones

pressiones transcendentes, quarum origo in Analyfi infinitorum fulius exponetur, ita ut numerus Curvarum transcendentium longe superet numerum Curvarum algebraicarum.

508. Quæcunque Functio non est algebraïca, ea est transcendens: ideoque Curvam, in cujus æquationem ingreditur, reddit transcendentem. Æquatio autem algebraïca, vel est rationalis, nullosque exponentes præter numeros integros continet, vel est irrationalis, atque exponentes fractos complectitur; hoc autem posteriori casu semper ad rationalitatem revocari potest. Cujus igitur Curvæ æquatio relationem inter Coordinatas x & y exprimens ita est comparata, ut neque sit rationalis, neque ad rationalitatem perduci possit, ea semper est transcendens. Quod si ergo in æquatione ejusmodi potestates occurrant, quarum exponentes neque sint numeri integri neque fracti, ad rationalitatem nullo modo perduci poterit; ideoque Curvæ talibus æquationibus contentæ erunt transcendentes. Hinc nascitur prima species & quasi simplicissima Curvarum transcendentium, in quarum æquationibus insunt exponentes irrationales; quæ quia neque Logarithmos neque Arcus circulares involvunt, sed ex sola numerorum irrationalium notione nascuntur, magis quodammodo ad Geometriam communem pertinere videntur, & hanc ob rem ab LEIBNITIO *interfendentes* sunt appellatæ, quasi medium tenerent inter algebraïcas & transcendentes.

509. Hujusmodi ergo Curva interfendens erit, quæ continetur æquatione $y = x^{\sqrt{2}}$; quomocunque enim hæc æquatio potestatibus sumendis evehatur, nunquam ad rationalitatem perducetur. Talis æquatio autem nulla via geometrica construi potest. Geometricè enim nullæ aliæ potestates exhiberi possunt, nisi quarum exponentes sint numeri rationales, hancque ob causam istiusmodi Curvæ ab algebraïcis maxime discrepant. Si enim exponentem $\sqrt{2}$ tantum vero proxime exhibere velimus, ejus loco ponendo aliquam ex his fractio-

LIB II. nibus $\frac{3}{2}$; $\frac{7}{5}$; $\frac{17}{12}$; $\frac{41}{29}$; $\frac{99}{70}$, quæ valorem $\sqrt{2}$ proxime exprimunt, Curvæ quidem algebraicæ prodibunt ad quæsitam proxime accedentes, at ordinis erunt vel tertii, vel septimi, vel decimi septimi, vel quadragesimi primi, &c. Quare, cum $\sqrt{2}$ rationaliter exprimi nequeat nisi per fractionem, cujus numerator & denominator sint numeri infinite magni, hæc Curva ordini Linearum infinitesimo erit accensenda, ideoque pro algebraicâ haberi non poterit. Huc accedit, quod $\sqrt{2}$ duplicem involvat valorem, alterum affirmativum alterum negativum, ex quo y duplicem perpetuo sortietur valorem, sicque gemina Curva resultabit.

510. Deinde vero si hanc Curvam exacte construere velimus, id sine Logarithmorum beneficio præstare non possumus. Cum enim sit $y = x^{\sqrt{2}}$, erit, Logarithmis sumendis, $ly = \sqrt{2} \cdot lx$, cujusvis ergo Abscissæ Logarithmus per $\sqrt{2}$ multiplicatus dabit Logarithmum Applicatæ; unde ad quamvis Abscissam x respondens Applicata ex canone Logarithmorum assignabitur. Sic, si fuerit $x = 0$, erit $y = 0$: si $x = 1$, erit $y = 1$; qui valores ex æquatione facillime fluunt: at, si $x = 2$, erit $ly = \sqrt{2} \cdot l2 = \sqrt{2} \cdot 0,3010300$: &, ob $\sqrt{2} = 1,41421356$, erit $ly = 0,4257274$, ideoque proxime $y = 2,665186$: & si $x = 10$, erit $ly = 1,4142356$, hincque $y = 25,955870$. Hoc igitur modo ad singulas Abscissas Applicatæ supputari, atque adeo Curva construï poterit, si quidem Abscissæ x valores affirmativi tribuantur. Sin autem Abscissa x valores obtineat negativos, tum difficile est dictu utrum valores ipsius y , futuri sint reales an imaginarii: sit enim $x = -1$, & quid sit $(-1)^{\sqrt{2}}$ definiri non poterit, quoniam approximationes ad valorem $\sqrt{2}$ nihil adjumenti afferunt.

511. Multo minus erit dubitandum, quin æquationes, in quibus adeo exponentes imaginarii reperiuntur, ad genus transcendendum referri debeant. Fieri autem omnino potest, ut
expressio

expressio continens exponentes imaginarios valorem realem atque determinatum exhibeat. Hujus rei exempla supra jam CAP. XXXI. occurrerunt; unde hic sufficiat unum exemplum attulisse hoc

$$2y = x^{+\sqrt{-1}} + x^{-\sqrt{-1}},$$

in quo, etiamfi utrumque membrum $x^{+\sqrt{-1}}$ & $x^{-\sqrt{-1}}$ fit quantitas imaginaria; tamen summa amborum valorem habet realem. Sit enim $lx = v$, sumto e pro numero, cujus Logarithmus hyperbolicus est $= 1$, erit $x = e^v$, quo valore loco x substituto, erit $2y = e^{+v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}}$. Vidimus autem in Sectione superiori §. 138. esse

$$\frac{e^{+v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}}}{2} = \text{cos. A. } v,$$

unde fiet $y = \text{cos. A. } v = \text{cos. A. } lx$. Scilicet, proposito quocunque ipsius x valore in numeris, sumatur ejus Logarithmus hyperbolicus, tum in Circulo, cujus radius $= 1$, abscindatur Arcus isti Logarithmo æqualis, hujusque Arcus cosinus dabit valorem Applicatæ y . Sic, si sumatur $x = 2$, ut sit $2y = 2^{+\sqrt{-1}} + 2^{-\sqrt{-1}}$, erit $y = \text{cos. A. } l2 = \text{cos. A.}$

0,6931471805599. Iste autem Arcus ipsi $l2$ æqualis, cum Arcus $= 3, 1415926535$ &c., contineat 180° , per regulam auream inveniatur fore $39^\circ, 42', 51'', 52''', 9''''$, cujus cosinus est 0,76923890135408. hicque numerus dat valorem Applicatæ y respondentem Abscissæ $x = 2$. Cum igitur hujusmodi expressiones & Logarithmos & Arcus circulares involvant, jure ad transcendentem referuntur.

§ 12. Inter Curvas ergo transcendentem primum locum tenent, quarum æquationes, præter quantitates algebraicas, Loga-

LIB. II. Logarithmos involvunt, atque simplicissima harum erit quæ continetur hac æquatione $l \frac{y}{a} = -\frac{x}{b}$, seu $x = bl \frac{y}{a}$, ubi perinde est cujusnam generis Logarithmi accipiantur, quia multiplicatione constantis b omnia Logarithmorum systemata ad idem revocantur. Denotet ergo character l Logarithmos hyperbolicos, atque Curva æquatione $x = bl \frac{y}{a}$ contenta sub nomine LOGARITHMICÆ vulgo est nota. Sit e numerus, cujus Logarithmus est $= 1$, ita ut sit $e = 2, 71828182845904523536028$, fietque $e^{x:b} = \frac{y}{a}$; seu $y = ae^{x:b}$, ex qua æquatione natura Curvæ logarithmicæ facillime cognoscitur. Si enim loco x successive substituantur valores in arithmetica progressionem procedentes, Applicatæ y valores tenebunt inter se progressionem geometricam. Quæ quo facilius ad constructionem accommodetur, ponatur $e = m^n$, & $b = nc$, eritque $y = am^{x:c}$, ubi m numerum quemcunque affirmativum unitate majorem significare potest. Si igitur sit

$$x = 0, c, 2c, 3c, 4c, 5c, 6c, \&c.$$

erit

$$y = a, am, am^2, am^3, am^4, am^5, am^6, \&c.;$$

&, tribuendis ipsi x valoribus negativis, si ponatur

$$x = -c, -2c, -3c, -4c, -5c, \&c.$$

erit

$$y = \frac{a}{m}, \frac{a}{m^2}, \frac{a}{m^3}, \frac{a}{m^4}, \frac{a}{m^5}, \&c.$$

TAB. 513. Hinc patet Applicatas y ubique valores habere affirmativos, & quidem in infinitum crescentes, auctis Abscissis
 XXIV. x affirmative in infinitum; ex altera autem Axis parte in infinitum
 Fig. 101.

nitum decreſcentes, ita ut hinc Axis ſit Curvæ Aſymtota *Ap*. Sumto ſciſicet *A* pro Abſciſſarum initio, erit hoc loco Applicata *AB = a*: &, ſumta Abſciſſa *AP = x*, erit Applicata *PM = y = am^{x:c} = ae^{x:b}*: ideoque $l. \frac{y}{a} = \frac{x}{b}$. Unde Abſciſſa *AP* per conſtantem *b* diviſa exprimit Logarithmum rationis $\frac{PM}{AB}$. Si Abſciſſarum initium in alio quocunque Axis puncto *a* ſtatuetur, æquatio ſimilis manet. Sit enim *Aa = f*, ac poſita *aP = t*, ob $x = t - f$, erit $y = ae^{(t-f):b} = ae^{t:b} : e^{f:b}$. Vocetur conſtans $a : e^{f:b} = g$, erit $y = ge^{t:b}$. Hinc, ob $ab = g$, intelligitur fore $\frac{aP}{b} = l. \frac{PM}{ab}$; ideoque ductis duabus quibuſvis Applicatis *PM* & *pm*, intervallo *Pp* a ſe invicem diſtantibus, erit $\frac{Pp}{b} = l. \frac{PM}{pm}$, & conſtans *b*, a qua iſta relatio pendet, erit inſtar Parametri Logarithmicæ.

CAP.
XXI.

514. Tangens hujus Curvæ logarithmicæ in quovis puncto *M* etiam facile poterit definiri. Cum enim, poſita *AP = x*, ſit *PM = ae^{x:b}*, ducatur alia quæcunque Applicata *QN*, a priori intervallo *PQ = u* diſſita, eritque $QN = ae^{(x+u):b} = ae^{x:b} . e^{u:b}$; &, ducta *ML* Axi parallela, erit $LN = (QN - PM) = ae^{x:b} (e^{u:b} - 1)$. Per puncta *M* & *N* ducatur recta *NMT* Axi occurrens in puncto *T*, erit $LN:ML = PM:PT$, hincque $PT = u : (e^{u:b} - 1)$. Verrum, uti in Sectione ſuperiori oſtendimus, per Seriem infinitam eſt $e^{u:b} = 1 + \frac{u}{b} + \frac{u^2}{2b^2} + \frac{u^3}{6b^3} + \&c.$: ideoque $PT =$

LIB. II.

I

Evanescat jam intervallum PQ
 $\frac{i}{b} + \frac{u}{2b^2} + \frac{uu}{6b^3} + \&c.$

$= u$; & ob puncta M & N coincidentia, recta NMT fiet Curvæ Tangens, eritque tum Subtangens $PT = b$, ideoque constans; quæ est proprietas palmaria Curvæ logarithmicæ. Parameter ergo Logarithmicæ b simul ejusdem est Subtangens constantis ubique magnitudinis.

515. Quæstio hic oritur, utrum hoc modo tota Curva logarithmica sit descripta; & an ea, præter hunc ramum MBm utrinque in infinitum excurrentem, nullas alias habeat partes. Vidimus enim supra nullam dari Asymptotam, ad quam non duo rami convergant. Statuerunt ergo nonnulli, Logarithmicam ex duabus constare partibus similibus ad utramque Axis partem sitis, ita ut Asymptota simul futura sit Diameter. Verum æquatio $y = a e^{x:b}$ hanc proprietatem minime ostendit;

quoties enim est $\frac{x}{b}$ vel numerus integer, vel fractio denominatorem habens imparem, tum y unicum habet valorem realem eumque affirmativum. Quod si autem fractio $\frac{x}{b}$ habeat denominatorem parem, tum Applicata y geminum induet valorem, alterum affirmativum alterum negativum, hicque Curvæ punctum ad alteram Asymptotæ partem exhibebit: ex quo Logarithmica infra Asymptotam innumerabilia habebit puncta discreta, quæ Curvam continuam non constituunt, etiamsi ob intervalla infinite parva Curvam continuam mentiantur; quod est paradoxon in Lineis algebraïcis locum nullum inveniens. Hinc etiam aliud oritur paradoxon multo magis mirandum. Cum enim numerorum negativorum Logarithmi sint imaginarii, (quod tum per se patet, tum inde intelligitur quod $\log. -1$ ad $\sqrt{-1}$ rationem habeat finitam) erit $l. -n$, quantitas imaginaria, quæ sit $= i$: at, cum Logarithmus quadrati æquetur duplo Logarithmo radicis, erit $l. (-n)^2 = l. n^2 =$

2i. At, $\log. n^2$ est quantitas realis, $= 2 l. n$: unde sequitur, & quantitatem realem $l. n$ & imaginariam i fore semissem ejusdem quantitatis realis $l. n^2$. Hinc porro quilibet numerus duplicem habiturus esset semissem, alteram realem alteram imaginariam; similiterque cujusque numeri triplex daretur triens, quadruplex quadrans, & ita porro, quarum tamen partium, unica tantum sit realis, quæ quomodo cum solita quantitatum notione conciliari queant, non liquet.

516. Concessis ergo his quæ assumimus, sequeretur numeri a semissem fore æque $\frac{a}{2} + l. - 1$, ac $\frac{a}{2}$: illius enim duplum est $a + 2l. - 1 = a + l. (-1)^2 = a + l. 1 = a$: ubi notandum est esse $+ l. - 1 = - l. - 1$, etiamsi non sit $l. - 1 = 0$: cum enim sit $- 1 = \frac{+1}{-1}$, erit $l. - 1 = l. + 1 - l. - 1 = - l. - 1$. Simili modo, cum sit $\sqrt[3]{1}$ non solum 1 sed etiam $\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$, erit $3l. \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} = l. 1 = 0$, ideoque ejusdem quantitatis a trientes erunt $\frac{a}{3}$; $\frac{a}{3} + l. \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$, & $\frac{a}{3} + l. \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$; tripla enim harum singularum expressionum producant eandem quantitatem a . Ad hæc dubia solvenda, quæ nullo modo admitti posse videntur, aliud statui oportet paradoxon: scilicet, cujusque numeri infinitos dari Logarithmos, inter quos plus uno reali non detur. Sic, etsi Logarithmus unitatis est $= 0$, tamen præterea innumerabiles alii unitatis dantur Logarithmi imaginarii: qui sunt $2l. - 1$, $3l. \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$, $4l. - 1$; & $4l. \frac{+ \sqrt{-1}}{2}$, innumerabilesque alii, quos extractio radicum monstrat. Hæc autem sententia multo est verisimilior, quam superior: posito enim $x = l.a$, erit $a = e^x$; ideoque $a = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \&c.$; quæ, cum sit æquatio

LIB. II. infinitarum dimensionum, mirum non est si x habeat radices infinitas. Quanquam autem sic posterius paradoxon resolvimus, tamen prius suam vim retinet, qua ad Logarithmicam infra Axem innumerabilia puncta discreta pertinere ostendimus.

517. Multo evidentius autem hujusmodi infinitorum punctorum discretorum existentia monstrari potest, per hanc æquationem $y = (-1)^x$: quoties enim x est numerus, vel

integer par vel fractus habens numeratorem parem, erit $y = 1$: sin autem x sit numerus vel integer impar vel fractus, cujus tam numerator quam denominator sint numeri impares, erit $y = -1$, reliquis casibus omnibus, quibus vel x est fractio denominatorem parem habens, vel adeo numerus irrationalis, valor ipsius y erit imaginarius. Æquatio ergo

$y = (-1)^x$ exhibebit innumerabilia puncta discreta ad utramque Axis partem intervallo $= 1$ posita, quorum ne bina quidem sunt contigua, hoc tamen non obstante, quæque bina ad eandem Axis partem sita, sibi tam erunt propinqua, ut intervallum sit data quavis quantitate assignabili minus. Inter duos enim Abscissæ valores quantumvis propinquos, non solum una sed infinitæ fractiones exhiberi possunt, quarum denominatores sint impares, ex his autem singulis nascuntur puncta ad æquationem propositam pertinentia: mentientur ergo hæc puncta duas Lineas rectas Axi parallelas ab eo utrinque intervallo $= 1$ distitas, in his enim Lineis nullum intervallum exhiberi potest in quo non unum, imo infinita puncta, æquatione $y = (-1)^x$ contenta, assignari queant. Hæc ea-

dem anomalia usuvenit in æquatione $y = (-a)^x$, aliisque huic similibus, ubi quantitas negativa ad exponentem indeterminatum elevatur. Hujusmodi ergo paradoxa, quæ in Curvis tantum transcendentibus locum habere possunt, hic exposuisse necesse erat.

518. Ad hoc ergo genus Curvarum a Logarithmis pendendum pertinent omnes æquationes, in quibus non solum Logarithmi occurrunt, sed etiam exponentes variables, quippe qui a Logarithmis ad numeros progrediendo oriuntur, unde istæ Curvæ etiam *exponentiales* vocari solent. Hujusmodi ergo

Curva erit, quæ in hac æquatione $y = x^x$, seu $ly = xlx$ continetur. Posito ergo $x = 0$, erit $y = 1$; si $x = 1$ erit $y = 1$; si $x = 2$, erit $y = 4$; si $x = 3$, erit $y = 27$, &c. Unde

BDM exprimet formam hujus Curvæ ad Axem AP relatæ, ita ut, sumta $AC = 1$, sit $AB = CD = 1$. Intra A & C autem Applicatæ erunt unitate minores; si enim sit $x = \frac{1}{2}$, erit $y = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,7071068$: minima vero erit Appli-

cata si capiatur Abscissa $x = \frac{1}{e} = 0,36787944$, fietque tum Applicata $y = 0,6922005$, uti in sequentibus docebitur. Quemadmodum autem hæc Curva ultra B sit comparata ut videamus, Abscissa x facienda est negativa, eritque $y = \frac{1}{(-x)^x}$, unde ista

pars ex meris punctis discretis constabit, ad Axem tanquam Asymptotam convergentibus. Cadent autem hæc puncta ad utramque Axis partem, prout x fuerit numerus vel par vel impar. Quin etiam infra Axem AP infinita hujusmodi puncta cadent, si pro x sumatur fractio denominatorem habens parem; posito enim $x = \frac{1}{2}$, erit & $y = + \frac{1}{\sqrt{2}}$ & $y = \frac{-1}{\sqrt{2}}$.

Curva ergo continua MDB in B subito terminatur, contra indolem Linearum algebraicarum: loco continuationis autem habebit puncta illa discreta; unde realitas istorum punctorum quasi conjugatorum eo luculentius perspicitur. Nisi enim hæc adesse concedantur, statui deberet, totam Curvam in puncto B subito cessare, id quod esset legi continuitatis contrarium, ideoque absurdum.

519. Inter infinitas alias hujus generis Curvas, quarum con-

LIB. II. strucio per Logarithmos effici potest, dantur ejusmodi, quarum constructio non tam facile patet, quæ tamen ope idoneæ substitutionis absolvi queat. Talis est Curva æquatione $x^y =$

y^x contenta; ex qua quidem statim perspicitur, Applicatam y perpetuo æqualem esse Abscissæ x , ita ut recta ad Axem sub angulo semirecto inclinata æquationi satisfaciat. Interim tamen manifestum est hanc æquationem latius patere, quam æquationem pro recta $y = x$; neque igitur hanc vim æquationis $x^y = y^x$ exhaurire: satisfieri enim huic æquationi potest, etiam si non sit $x = y$; quoniam, si $x = z$, etiam esse potest

TAB. XXV. $y = 4$. Præter rectam ergo $EA F$, æquatio proposita alias complectetur partes; ad quas inveniendas, ideoque ad rotam Lineam Fig. 103. æquatione contentam exhibendam, ponamus $y = t x$, ut sit

$x^{t x} = t^x x^x$: unde, radice potestatis x extrahenda, erit $x^t = t x$ & $x^{t-1} = t$; ideoque habebitur $x = t^{\frac{1}{t-1}}$ & $y = t^{\frac{t}{t-1}}$. Vel, posito $t - 1 = \frac{1}{u}$, erit $x =$

$(1 + \frac{1}{u})^u$ & $y = (1 + \frac{1}{u})^{u+1}$. Hinc Curva, præter

rectam $EA F$, habebit ramum RS ad rectas AG & AH , tanquam Asymptotas, convergentem, cujus recta AF erit Diameter. Secabit autem Curva rectam AF in puncto C ita ut sit $AB = BC = e$, denotante e numerum cujus Logarithmus est unitas. Insuper autem æquatio suppeditat innumerabilia puncta discreta, quæ cum recta EF , & Curva RCS æquationem exhauriunt. Hinc ergo innumerabilia binorum numerorum x & y paria exhiberi possunt ut sit $x^y = y^x$, tales enim numeri in rationalibus erunt

$$\begin{array}{ll}
 x = 2 & y = 4 \\
 x = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4} & y = \frac{3^3}{2^3} = \frac{27}{8} \\
 x = \frac{4^3}{3^3} = \frac{64}{27} & y = \frac{4^4}{3^4} = \frac{256}{81} \\
 x = \frac{5^4}{4^4} = \frac{625}{256} & y = \frac{5^5}{4^5} = \frac{3125}{1024} \\
 & \&c.
 \end{array}$$

horum scilicet binorum numerorum alter ad alterum elevatus eandem quantitatem producit: sic erit

$$\begin{array}{l}
 2^4 = 4^2 = 16 \\
 \left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{27}{3}} = \left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{9}{4}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{27}{4}} \\
 \left(\frac{64}{27}\right)^{\frac{256}{81}} = \left(\frac{256}{81}\right)^{\frac{64}{27}} = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{256}{27}} \\
 \&c.
 \end{array}$$

520. Quoniam in his similibusque aliis Curvis infinita puncta algebraice possunt determinari, minime tamen Curvis algebraicis annumerari possunt, quoniam innumerabilia alia exant puncta, quæ algebraice nullo modo exhiberi possunt. Transcramus ergo ad alterum Curvarum transcendentium genus, quod Arcus circulares requirit: hic autem perpetuo radium Circuli, cujus Arcus constructionem ingrediuntur, unitate exprimo, ne pluribus characteribus calculus perturbetur. Curvas autem ad hoc genus pertinentes non esse algebraicas facile ostendi potest, etiamsi impossibilitas quadraturæ Circuli nondum sit evicta. Consideremus enim simplicissimam tantum hujus generis æquationem hanc $\frac{y}{a} = A. \sin. \frac{x}{c}$; ita ut Applicata y sit proportionalis Arcui Circuli, cujus Sinus est $\frac{x}{c}$.

Quoniam enim eidem Sinui $\frac{x}{c}$ innumerabiles Arcus conveniunt,

LIB. II. niunt, Applicata y erit Functio infinitinomia; ideoque tam ipsa quam aliæ rectæ Curvam in infinitis punctis secabunt, quæ proprietas istam Curvam ab algebraicis clarissime distinguit. Sit s minimus Arcus sinui $\frac{x}{c}$ conveniens, & denotet π semi-circumferentiam Circuli, erunt valores ipsius $\frac{y}{a}$ sequentes

$$s; \pi - s; 2\varpi + s; 3\pi - s; 4\pi + s; 5\pi - s; \&c. \\ -\pi - s; -2\varpi + s; -3\pi - s; -4\pi + s; -5\pi - s; \&c.$$

T A B. Sumta ergo recta CAB pro Axe, & A pro Abscissarum principio; erunt primo, posito $x=0$, Applicatæ $AA^1 = \pi a$, XX V. $AA^2 = 2\pi a$, $AA^3 = 3\pi a$; &c. Itemque ex altera parte Fig. 104. $AA^{-1} = \pi a$, $AA^{-2} = 2\pi a$, $AA^{-3} = 3\pi a$, &c.: atque per singula hæc puncta Curva transibit. Sumta vero Abscissa $AP = x$, Applicata Curvam in infinitis punctis M fecabit, eritque $PM^1 = as$, $PM^2 = a(\varpi - s)$, $PM^3 = a(2\varpi + s)$, &c. Curva ergo tota ex infinitis portionibus AE^1A^1 ; $A^1F^1A^2$; $A^2E^2A^3$; $A^3F^3A^4$; &c., similibus erit composita; ita ut singulæ rectæ Axi BC parallelæ, quæ per puncta E & F ducuntur, futuræ sint Curvæ diametri. Erit vero $AC = AB = c$, & intervalla E^1E^2 , E^2E^3 , E^1E^{-1} , $E^{-1}E^{-2}$, itemque F^1F^2 , F^1F^{-1} , $F^{-1}F^{-2}$, erunt singula æqualia $2a\varpi$. Curva hæc a LEIBNITIO est vocata *Linea Sinuum*, quoniam ejus ope cujusque Arcus sinus facile invenitur. Cum enim sit $\frac{y}{a} = A. \sin. \frac{x}{c}$, erit vicissim $\frac{x}{c} = \sin. A. \frac{y}{a}$. Si ponatur $\frac{y}{a} = \frac{1}{2} \pi - \frac{z}{a}$, fiet $\frac{x}{c} = \cos. A. \frac{z}{a}$; sicque simul habetur *Linea Cosinum*.

§ 21. Simili modo ex hac consideratione oritur *Linea Tangentium*, cujus æquatio erit $y = A. \text{tang. } x$, positis brevitatis ergo $a=1$ & $c=1$; hinc ergo convertendo fit $x = \text{tang. } A. y = \frac{\sin. y}{\cos. y}$, cujus Curvæ figura facile ex natura Tangentium colligitur.

colligitur. Habebit autem infinitas Asymptotas inter se parallelas. Pari modo describi poterit *Linea Secantium* ex æquatione $y = A. \sec. x$, seu $x = \sec. A. y = \frac{1}{\cos. y}$, quæ etiam infinitos ramos habet in infinitum excurrentes. Maxime vero ex hoc Curvarum genere innotuit *CYCLOIS*, seu *Trochois*, quæ describitur a puncto in peripheria Circuli super linea recta rotando progredientis, cujus æquatio inter Coordinatas orthogonales est $y = \sqrt{(1 - x x) + A. \cos. x}$. Curva hæc, cum ob descriptionis facilitatem tum ob plurimas, quibus gaudet, insignes proprietates, maxime est notatu digna. Quoniam autem pleræque sine Analyfi infinitorum explicari nequeunt, hic tantum præcipuas, quæ ex descriptione immediate fluunt, breviter perpendamus.

CAP.
XXI.

522. Rotetur ergo Circulus *ACB* super recta *EA*; atque, ut investigatio latius pateat, non punctum Peripheriæ *B* sed punctum Diametri productæ *D* quodcumque describat Lineam curvam *Dd*. Sit hujus Circuli radius $CA = CB = a$, distantia $CD = b$, atque in hoc quidem situ punctum *D* locum obtineat summum. Pervenerit inter rotandum Circulus in situm $aQbR$; ac, posito spatio $AQ = z$, erit Arcus $aQ = z$, qui divisus per radium *a* dabit angulum $acQ = \frac{z}{a}$, & punctum describens erit in *d*, ut sit $cd = b$, angulus $dcQ = \pi - \frac{z}{a}$; & *d* erit punctum in Curva quæsita. Ducatur ex *d* primum in rectam *AQ* normalis *dp*, tum in rectam *QR* normalis *dn*; erit $dn = b. \sin. \frac{z}{a}$, & $cn = -b. \cos. \frac{z}{a}$; ergo $Qn = dp = a + b. \cos. \frac{z}{a}$. Producat *dn* donec rectæ *AD* occurrat in *P*; ac vocentur Coordinatæ $DP = x$, $Pd = y$; erit $x = b + cn$; seu $x = b - b. \cos. \frac{z}{a}$; & $y = AQ + dn = z + b. \sin. \frac{z}{a}$. Cum igitur

TAB.
XXV.
Fig. 105.

Euleri *Introduct. in Anal. infin. Tom. II.*

P p fit

L I B. II. sit $b. \text{cos. } \frac{z}{a} = b - x$, erit $b. \text{sin. } \frac{z}{a} = \sqrt{(2bx - xx)}$ &
 $z = a A. \text{cos.} \left(1 - \frac{x}{b}\right) = a A. \text{sin. } \frac{\sqrt{(2bx - xx)}}{b}$; quibus
 valoribus substitutis, erit $y = \sqrt{(2bx - xx)} + a A. \text{sin. } \frac{\sqrt{(2bx - xx)}}{b}$.
 Vel, si Abcissæ in Axe AD a Centro computentur voceturque $b - x = t$, erit $\sqrt{(2bx - xx)} = \sqrt{(bb - tt)}$, &
 inter t & y habebitur æquatio ista

$$y = \sqrt{(bb - tt)} + a A. \text{cos. } \frac{t}{b},$$

quæ æquatio dat Cycloidem *ordinariam*, si fuerit $b = a$; sin autem sit vel b major quam a , vel b minor quam a , Curva vocatur Cyclois vel *curtata* vel *elongata*. Semper autem erit y Functio infinitiplex ipsius x , vel t ; seu, quælibet recta basi AQ parallela Curvam in infinitis punctis secabit, nisi ejus distantia x vel t fuerit tanta, ut $\sqrt{(2bx - xx)}$ vel $\sqrt{(bb - tt)}$ fiat imaginaria quantitas.

T A B. 523. Inter Curvas hujus generis, quæ imprimis sunt cognitæ, referri debent *Epicycloides* & *Hypocycloides*, quæ oriuntur si
XXVI. Fig. 106. Circulus ACB super Peripheria alterius Circuli OAQ rotatur, intereaque punctum quodpiam D , vel extra vel intra Circulum mobilem sumtum, Curvam Dd describit. Ponatur Circuli immoti radius $OA = c$, radius Circuli mobilis $CA = CB = a$, & distantia puncti describentis $CD = b$; sumatur autem recta OD pro Axe Curvæ quaesitæ Dd . A situ hoc initiali, quo puncta O, C, D in directum jacent, processerit Circulus mobilis in situm QcR , descripto Arcu $AQ = z$, ita ut sit angulus $AOQ = \frac{z}{c}$. Erit ergo Arcus $Qa = AQ = z$; hincque angulus $acQ = \frac{z}{a} = Rcd$: & sumta recta $cd = CD = b$, erit d punctum in Curva Dd . Ex eo in Axem demittatur perpendicularum dP ; itemque ex c perpendi-

perpendicularum cm & cn parallela Axi OD . Ergo, ob angulum $Rcn = AOQ = \frac{z}{c}$, erit angulus $dcn = \frac{z}{c} + \frac{z}{a} = \frac{(a+c)z}{ac}$. Unde obtinetur $dn = b \sin. \frac{(a+c)z}{ac}$, & $cn = b \cos. \frac{(a+c)z}{ac}$. Deinde, ob $OC = Oc = a + c$, erit $cm = (a+c) \sin. \frac{z}{c}$, & $Om = (a+c) \cos. \frac{z}{c}$. Vocatis ergo Coordinatis $OP = x$, & $Pd = y$, erit $x = (a+c) \cos. \frac{z}{c} + b \cos. \frac{(a+c)z}{ac}$, & $y = (a+c) \sin. \frac{z}{c} + b \sin. \frac{(a+c)z}{ac}$. Hinc patet, si $\frac{a+c}{a}$ fuerit numerus rationalis, tum ob commensurabilitatem angulorum $\frac{z}{c}$ & $\frac{(a+c)z}{ac}$, ipsam incognitam z eliminari, ideoque æquationem algebraicam inter x & y inveniri posse. Reliquis casibus Curva hoc modo descripta erit transcendens.

Ceterum hic notandum est, si sumatur a negativum, tum Hypocycloidem esse prodituram, Circulo mobili intra Circulum immobilem cadente. Vulgo quidem b statuitur Radius a æqualis; sicque Epicycloides & Hypocycloides proprie sic dictæ resultant. Hic igitur inventæ Curvæ latius patent; & quia æquationes non sunt difficiliore, hanc conditionem adjicere visum est. Si quadrata xx & yy addantur, erit $xx + yy = (a+c)^2 + b^2 + 2b(a+c) \cos. \frac{z}{a}$, cujus æquationis ope eliminatio ipsius z eo facilius expedietur, quoties quidem quantitates a & c fuerint commensurabiles.

524. Præter casus, quibus amborum Circularum radii a & c sunt inter se commensurabiles, Curvæque fiunt algebraicæ, notari meretur iste quo $b = -a - c$; seu, quo punctum Curvæ D in Centrum Circuli immobilis O incidit. Sit igitur $b = -a - c$; eritque $xx + yy = 2(a+c)^2 (1 - \cos. \frac{z}{a})$

LIB. II. $= 4(a+c)^2 (\text{cof. } \frac{z}{2a})^2$; unde fiet $\text{cof. } \frac{z}{2a} = \frac{\sqrt{(xx+yy)}}{2(a+c)}$. Deinde, cum fit $x = (a+c) (\text{cof. } \frac{z}{c} - \text{cof. } \frac{(a+c)z}{ac})$ & $y = (a+c) (\text{fin. } \frac{z}{c} - \text{fin. } \frac{(a+c)z}{ac})$, erit $\frac{x}{y} = -\text{tang. } \frac{(2a+c)z}{2ac}$ & $\text{fin. } \frac{(2a+c)z}{2ac} = \frac{x}{\sqrt{(xx+yy)}}$; atque $\text{cof. } \frac{(2a+c)z}{2ac} = \frac{-y}{\sqrt{(xx+yy)}}$. Quare, cum fit $\sqrt{(xx+yy)} = 2(a+c) \text{cof. } \frac{z}{2a}$, fiet $x = 2(a+c) \cdot \text{cof. } \frac{z}{2a} \cdot \text{fin. } \frac{(2a+c)z}{2ac}$, & $y = -2(a+c) \cdot \text{cof. } \frac{z}{2a} \cdot \text{cof. } \frac{(2a+c)z}{2ac}$. Sit, exempli gratia, $c = 2a$; erit $x = 6a \cdot \text{cof. } \frac{z}{2a} \cdot \text{fin. } \frac{z}{a}$, & $y = -6a \cdot \text{cof. } \frac{z}{2a} \cdot \text{cof. } \frac{z}{a}$, & $\sqrt{(xx+yy)} = 6a \cdot \text{cof. } \frac{z}{2a}$. Ponamus $\text{cof. } \frac{z}{2a} = q$, erit $\text{fin. } \frac{z}{2a} = \sqrt{(1-qq)}$, & $\text{fin. } \frac{z}{a} = 2q \sqrt{(1-qq)}$, atque $\text{cof. } \frac{z}{a} = 2qq - 1$: unde fit $q = \frac{\sqrt{(xx+yy)}}{6a}$, & $y = -6aq(2qq-1) = (1-2qq)\sqrt{(xx+yy)} = (1 - \frac{xx-yy}{18aa})\sqrt{(xx+yy)}$; seu, $18aay = (18aa - xx - yy)\sqrt{(xx+yy)}$. Ponatur $18aa = ff$; & sumtis quadratis, habebitur ista æquatio sexti ordinis $(xx+yy)^3 - 2ff(xx+yy)^2 + f^2xx = 0$. Quoniam vero hic nobis est propositum non Curvas algebraicas sed transcendentes contemplari, his missis ad ejusmodi Curvas progrediamur, quarum constructio simul tam Logarithmos quam Arcus circulares requirat.

Γ Α Β.
XXVI.

Fig. 107. 525. Supra vero jam ejusmodi nacti sumus Curvam ex æquatione $2y = x + \sqrt{-1} + x - \sqrt{-1}$, quam transmstavimus in hanc $y = \text{cof. } A \cdot lx$. Hæc vero ulterius abit in $A \cdot \text{cof. } y = lx$, & $x = e^{A \cdot \text{cof. } y}$. Sumta ergo recta AP pro Axe, in eoque A pro initio Abscissarum, primo patet ultra A in regione

gione Abscissarum negativarum Curvæ nullam dari portionem continuam, Axis autem AP a Curva in infinitis punctis D interfecabitur, quorum punctorum ab A distantiae progressio-

CAP.
XXI.

nem geometricam constituent, erit scilicet $AD = e^{\frac{\pi}{2}}$;

$AD^1 = e^{\frac{3\pi}{2}}$; $AD^2 = e^{\frac{5\pi}{2}}$; $AD^3 = e^{\frac{7\pi}{2}}$; &c., tum vero dabuntur infinitæ intersecciones ad A propius accedentes,

$AD^{-1} = e^{-\frac{\pi}{2}}$, $AD^{-2} = e^{-\frac{3\pi}{2}}$, $AD^{-3} = e^{-\frac{5\pi}{2}}$ &c.

Deinde hæc Curva utrinque ad Axem exurret ad distantias $AB = AC = 1$, ibique rectas Axi parallelas tanget in infinitis punctis E & F , quorum distantiae a B & C pariter progressionem geometricam constituent. Infinitis ergo flexibus Curva ad rectam BC accedet, atque tandem cum ea profus confundetur. Singularis ergo hujus Curvæ proprietas in hoc consistit, quod non recta infinita sed finita BC Curvæ sit Asymptota, quo ipso hujus Curvæ indoles ab algebraicis maxime distinguitur.

526. Ad Curvas transcendentes, quarum constructio angulos, vel solos vel cum Logarithmis conjunctos, requirit, referri quoque debent innumerabiles SPIRALIUM species. Respiciunt autem Spirales punctum quodpiam fixum C tanquam Centrum, circa quod plerumque infinitis spiris circumducuntur. Natura harum Curvarum commodissime explicatur per æquationem inter cujusque Curvæ puncti M a Centro C distantiam CM & angulum ACM , quem hæc recta CM cum recta positione data CA constituit. Sit ergo angulus $ACM = s$; seu, sit s Arcus Circuli radio $= 1$ descripti, qui sit anguli ACM mensura, ac ponatur recta $CM = z$. Quod, si nunc detur æquatio quæcunque inter variables s & z , Curva resultabit spiralis. Cum enim angulus ACM , præter s , infinitis modis exprimi queat; quoniam anguli $2\pi + s$, $4\pi + s$, $6\pi + s$, &c., item $-2\pi + s$, $-4\pi + s$, &c., eandem positionem rectæ CM exhibent, his valoribus loco s

TAB.
XXVI
Fig. 108

LIB. II. In æquatione substitutis, distantia CM infinitos diversos obtinebit valores, ideoque recta CM producta Curvam in infinitis punctis secabit, nisi ex his valoribus quantitas z fiat imaginaria. Incipiamus ergo a casu simplicissimo, quo est $y = as$; eruntque pro eadem rectæ CM positione valores ipsius y isti $a(2\pi + s)$, $a(4\pi + s)$, $a(6\pi + s)$ &c., itemque $-a(2\pi - s)$, $-a(4\pi - s)$, $-a(6\pi - s)$, &c. Quin etiam si pro s ponatur $\pi + s$, eadem rectæ CM manebit positio, præterquam quod valor ipsius z capi debeat negative: hinc ad valores ipsius z assignatos, addi oportet hos $-a(\pi + s)$, $-a(3\pi + s)$, $-a(5\pi + s)$, &c. : prætereaque istos $a(\pi - s)$; $a(3\pi - s)$; $a(5\pi - s)$, &c. Curvæ ergo hujus forma crit talis, qualis in figura ad marginem allegata repræsentatur; rectam scilicet AC in C tangit, hincque duobus ramis, utrinque infinitis gyris Centrum C ambientibus & se mutuo in recta BC ad AC normali perpetuo decussantibus, in infinitum extenditur; eritque recta BCB ejus Diameter. Vocari autem hæc Curva ab inventore solet *Spiralis Archimæda*; atque, si semel est exacte descripta, inservit ad quemvis angulum in quocunque partes secandum, uti ex ejus æquatione $z = as$ sponte patet.

TAB.
XXVII.
Fig. 109.

527. Quemadmodum æquatio $z = as$, quæ, si z & s essent Coordinatæ orthogonales, foret pro Linea recta, præbuit Spiralem Archimædam; ita si aliæ æquationes algebraicæ inter z & s accipiantur, infinitæ aliæ prodibunt Lineæ spirales, si quidem æquatio ita sit comparata, ut singulis ipsius s valoribus respondeant valores reales ipsius z . Ita, hæc æquatio $z = \frac{a}{s}$, quæ similis est æquationi pro Hyperbola ad Asymptotas relata, præbet spiralem, quæ a Cel. *Johanne* BERNOULLIO vocata est Spiralis Hyperbolica; atque, postquam ex Centro C infinitis gyris exiisset, tandem in distantia infinita ad rectam AA tanquam Asymptotam accedit. Quod si proponatur æquatio $z = a\sqrt{s}$; angulis s negative sumtis nulla respondebit distantia realis z ; valoribus autem affirmativis singulis

gulis ipsius s gemini valores ipsius z respondebunt, alter affirmativus alter negativus: spiræ tamen circa C absolventur infinitæ. Sin autem æquatio inter z & s fuerit hujusmodi $z = a\sqrt{(mn - ss)}$, variabilis z nullum habebit valorem realem nisi s contineatur intra hos limites $+n$ & $-n$; ideoque hoc casu Curva erit finita. Scilicet, si ad Axem ACB per Centrum C utrinque inclinentur rectæ EF , EF , cum Axe angulum $= n$ constituentes, hæ erunt Curvæ sese in C decussantis tangentes, ipsaque Curva habebit Lemniscatæ formam $ACBCA$. Simili autem modo innumerabiles aliæ obtinebuntur Linearum transcendentium formæ, quas evolvere nimis foret prolixum.

CAP.
XXI.

TAB.
XXVII.
Fig. 110.

528. Hæc tractatio porro in immensum amplificari posset, si inter z & s non æquationes algebraicæ sed adeo transcendentibus accipiantur. Ex quo genere præ reliquis notari mereatur ea Linea curva, quæ hac æquatione $s = n l. \frac{z}{a}$ exprimitur; in qua scilicet anguli s sunt Logarithmis distantiarum z proportionales; ob quam causam hæc Curva *Spiralis Logarithmica* appellatur, atque ob plurimas insignes proprietates maxime est nota. Hujus Curvæ primaria proprietas est, quod omnes rectæ ex Centro C eductæ Curvam sub æqualibus angulis interfecerint. Ad eam ex æquatione educendam, sit angulus $ACM = s$, & recta $CM = z$, eritque $s = n l. \frac{z}{a}$ &

TAB.
XXVII.
Fig. 111.

$z = a e^{\frac{s}{n}}$; tum capiatur angulus major $ACN = s + v$, erit recta $CN = a e^{\frac{s}{n}} e^{\frac{v}{n}}$, ideoque Centro C descripto Arcu ML , qui erit $= z v$, fiet $LN = a e^{\frac{s}{n}} (e^{\frac{v}{n}} - 1) = a e^{\frac{s}{n}} (\frac{v}{n} + \frac{v^2}{2n^2} + \frac{v^3}{6n^3} + \&c.)$. Hinc erit, $\frac{ML}{LN} = v$

LIB. II.

$$\frac{v}{n} + \frac{v^2}{2n^2} + \frac{v^3}{6n^3} + \&c. = \frac{n}{1 + \frac{v}{2n} + \frac{v^2}{6nn} + \&c.}$$

nescente angulorum differentia $MCN = v$, fiet $\frac{ML}{LN}$ tangens anguli, quem Radius CM cum Curva constituit; unde, facto $v = 0$, istius anguli AMC tangens erit $= n$, ideoque iste angulus constans. Si fuerit $n = 1$, iste angulus erit semirectus, hocque casu Spiralis logarithmica vocatur semirectangula.

CAPUT XXII.

Solutio nonnullorum problematum ad Circulum pertinentium.

529. **P**osito Radio Circuli $= 1$, supra vidimus fore semicircumferentiam π , seu Arcum 180 graduum, $= 3,14159265358979323846264338$, cujus numeri Logarithmus decimalis seu vulgaris est $0,497149872694133854351268288$; qui si multiplicetur per 2, 30258 &c, prodibit ejusdem numeri Logarithmus hyperbolicus, qui erit $= 1,1447298858494001741434237$. Cum igitur longitudo Arcus 180 graduum sit cognita, inde cujusvis Arcus in gradibus dati longitudo poterit assignari. Propositus sit Arcus n graduum, cujus longitudo, quæ quæritur, sit $= z$; erit $180 : n = \pi : z$, ideoque $z = \frac{\pi n}{180}$: hinc Logarithmus ipsius z reperitur, si a Logarithmo numeri n subtrahatur iste Logarithmus $1,758122632409172215452526413$. Quod si autem Arcus propositus detur in minutis primis, ut sit n' ; tum a Logarithmo ipsius n subtrahi debet iste Logarithmus $3,536273882792815847961293211$. Sin autem Arcus propositus

positus detur in minutis secundis ut sit $= n''$, tum longitudinis istius Arcus Logarithmus reperietur, si a Logarithmo numeri n subtrahatur iste Logarithmus

$5,314425133176459480470060009$, vel, si ad Logarithmum numeri n addatur $4,685574866823540519529939990$, & a characteristica summae 10 subtrahantur.

530. Ex his ergo vicissim Radius & ejus partes quæcunque, cujusmodi sunt Sinus, Tangentes, & Secantes in Arcus converti, hique Arcus more solito secundum gradus, minuta & secunda exprimi possunt. Sit x hujusmodi Linea per Radium 1 ejusque partes decimales expressa; sumatur ejus Logarithmus, ejusque characteristica denario augeatur, quemadmodum in tabulis Logarithmi Sinuum, Tangentium & Secantium repræsentari solent; quo facto vel subtrahatur ab isto Logarithmo $4,685574866823540519529939990$, vel ad eundem Logarithmum addatur $5,314425133176459480470060009$; utroque casu prodibit Logarithmus, cujus numerus respondens præcabit Arcum in minutis secundis expressum. Posteriori quidem casu characteristica denario minui debet. Quod si autem quærat Arcus ipsi radio æqualis; hic sine Logarithmis facilius per regulam auream invenitur, cum sit π ad 180° ut 1 ad Arcum radio æqualem; hinc autem reperitur iste Arcus in gradibus expressus $57^\circ, 295779513082320876798$, idem vero Arcus in minutis primis expressus erit $3437', 74677078493925260788$; in minutis vero secundis erit idem Arcus $= 206264''$, 8062470963551564728 . Confecto autem more hic Arcus expressus continebit

$$57^\circ, 17', 44'', 48''', 22'''' , 29''''' , 21'''''' ,$$

Hujus Arcus per series in Sectione superiori exhibitas reperitur
Sinus $= 0,84147098480514$

&

Cosinus $= 0,54030230584341$
quorum numerorum ille per hunc divisus dabit Tangentem anguli $57^\circ, 17', 44'', 48''', 22'''' , 29''''' , 21''''''$, &c.

Euleri *Introduct. in Anal. infin. Tom. II.*

Q q

531.

LIB. II. 531. His igitur præmissis, quibus Arcus circulares cum Sinibus & Tangentibus comparari possunt, plurimas quæstiones ad naturam Circuli spectantes resolvere poterimus. Ac primo quidem, patet omnem Arcum Sinu suo esse majorem, nisi sit evanescentis; aliter autem ratio Cofinuum est comparata, quoniam anguli evanescentis Cofinus est = 1, ideoque Arcu major, anguli vero recti Cofinus est = 0, ideoque Arcu est minor: ex quo patet intra limites 0° & 90° dari Arcum, qui sit suo Cofinui æqualis, quem sequente problemate investigemus.

PROBLEMA I.

Invenire Arcum Circuli, qui sit suo Cofinui æqualis.

SOLUTIO.

Sit s iste Arcus quæsitus; eritque $s = \text{cof. } s$; ex qua æquatione valor ipsius s commodius quam per regulam *falsi* dictam vix inveniri poterit. Ad hoc autem jam propemodum valorem ipsius s nosse oportet, quod vel levi conjectura assequi licet: nisi autem hoc pateat, tres pluresve valores loco s substituuntur, & Cofinus pariter ad eandem unitatem revocetur. Ponamus $s = 30^\circ$, quem Arcum ad partes radii revocemus regula supra data

$$\begin{array}{r} l. 30 = 1,4771213 \\ \text{subtrahe } 1,7581226 \\ \hline l. \text{Arc. } 30^\circ = 9,7189987 \\ \text{at est} \end{array}$$

$$l. \text{cof. } 30 = 9,9375306$$

unde patet Cofinum 30° multo esse majorem Arcu ideoque Arcum quæsitum majorem esse 30°, Fingamus ergo

$$\begin{aligned}
 s &= 40^\circ \\
 &\text{critque} \\
 l. 40 &= 1,6020600 \\
 \text{subtrahe} &\underline{1,7581226} \\
 l. \text{Arc. } 40^\circ &= 9,8439374 \\
 &\text{at est} \\
 l. \text{cos. } 40 &= 9,8842540
 \end{aligned}$$

hinc intelligitur Arcum quæsitum aliquanto majorem esse quam 40° , hancque ob rem fingamus $s = 45^\circ$, erit

$$\begin{aligned}
 l. 45 &= 1,6532125 \\
 \text{subtrahe} &\underline{1,7581226} \\
 l. \text{Arc. } 45^\circ &= 9,8950899 \\
 &\text{at est} \\
 l. \text{cos. } 45^\circ &= 9,8494850
 \end{aligned}$$

continetur ergo angulus quæsitus inter 40° , & 45° : atque adeo hinc proxime definiri poterit. Nam, posito $s = 40^\circ$,

$$\begin{aligned}
 \text{est error} &= + 403166: \\
 \text{posito autem } s &= 45^\circ, \\
 \text{est error} &= - \underline{456049}, \\
 \& \text{ differentia} &= 859215,
 \end{aligned}$$

Fiat ergo ut 859215 ad 403166 ita differentia hypothesium 5° ad excessum Arcus quæsitæ supra 40° , unde Arcus quæsitus major fit quam 42° , limites enim illi nimis sunt remoti, quam ut exactius definire queamus. Sumamus ergo limites propiores

LIB. II.

	$s = 42^\circ$	$s = 43^\circ$
$l.s =$	1,6232493	1,6334685
subtrahe	1,7581226	1,7581226
$l.s =$	9,8651267	9,8753459
	& est	& est
$l. \text{Cof}.s =$	9,8710735	9,8641275
	+ 59468	- 112184
	112184	

$$171652 : 59468 = 1^\circ : 20', 47''.$$

Artissimos ergo obtinuimus limites 42° , $20'$, & 42° , 21 intra quos verus ipsius s valor contineatur. Hos angulos ad minuta prima reuocemus

	$s = 2140'$	$s = 2541'$
$l.s =$	3,4048337	3,4050047
subtrahe	3,5362739	3,5362739
$l.s =$	9,8685598	9,8687308
$l. \text{cof}.s =$	9,8687851	9,8686700
	+ 2253	- 608
	608	

$$2861 : 2253 = 1' : 47'', 14'''$$

Hinc concludimus Arcum quaesitum, qui suo Cofinui sit æqualis, fore $= 42^\circ$, $20'$, $47''$, $14'''$, huiusque Cofinus, seu ipsa longitudo, erit $= 0,7390847$. Q. E. I.

TAB. XXVIII
Fig. 112. 532. Sector Circuli ACB a Chorda AB in duas partes secatur, Segmentum AEB & triangulum ACB , quorum illud hoc minus est si angulus ACB fuerit exiguus, majus autem si angulus ACB sit admodum obtusus. Dabitur ergo casus, quo Sector ACB per Chordam AB in duas partes æquales secatur, unde nascitur.

PROBLEMA II.

Invenire Sectorem Circuli ACB , qui a Chorda AB in duas partes æquales secatur, ita ut Triangulum ACB æquale sit Segmento AEB .

SOLUTIO

S O L U T I O.

CAP.
XXII.

Posito Radio $AC = 1$, fit Arcus quæsitus $AEB = 2s$,
 ut fit ejus semiffis $AE = BE = s$: ducto ergo Radio CE ,
 erit $AF = \sin.s$, & $CF = \cos.s$: Unde fit Triangulum ACB
 $= \sin.s \cos.s = \frac{1}{2} \cdot \sin.2s$; & ipse Sector ACB est $= s$,
 qui cum æquari debeat duplo Triangulo, erit $s = \sin.2s$; ideo-
 que Arcus quæri debet, qui æqualis fit Sinui Arcus dupli.
 Primum quidem patet angulum ACB recto esse majorem;
 ideoque s superare 45° , unde sequentes faciamus hypotheses

	$s = 50^\circ$	$s = 55^\circ$	$s = 54^\circ$
$l.s =$	1, 6989700	1, 7403627	1, 7323938
subtraha	1, 7581226	1, 7581226	1, 7581226
	9, 9408474	9, 9822401	9, 9742712
$l.\sin.2s =$	9, 9933515	9, 9729858	9, 9782063
	+ 525041	- 92543	+ 39351
	92543		
	617584 : 525041		$= 5^\circ : 4^\circ, 15'$

Erit ergo propemodum $s = 54^\circ, 15'$: unde ad superiores hypotheses addamus $s = 54^\circ$, & ex erroribus concludetur $s = 54^\circ, 17', 54''$, qui valor a vero minuto integro non discrepat: faciamus ergo sequentes positiones minuto tantum discrepantes

$s = 54^\circ, 17'$	$s = 54^\circ, 18'$	$s = 54^\circ, 19'$
feu	feu	feu
$s = 3257'$	$s = 3258'$	$s = 3259'$
&	&	&
$2s = 108^\circ, 34'$	$2s = 108^\circ, 36'$	$2s = 108^\circ, 38'$
$\text{compl.} = 71^\circ, 26'$	$\text{compl.} = 71^\circ, 24'$	$\text{compl.} = 71^\circ, 22'$
$l.s = 3, 5128178$	3, 5129511	3, 5130844
subtraha	3, 5362739	3, 5362739
$l.s = 9, 9765439$	9, 9766772	9, 9768105
$l.\sin.2s = 9, 9767872$	9, 9767022	9, 9766171
+ 2433	+ 250	- 1934
	1934	
	2184	

nat ergo $2184 : 250 = 1' : 6'', 52'''$

Q q 3

Hinc

LIB. II. Hinc erit $s = 54^\circ, 18', 6'', 52'''$. Si hunc angulum accuratius
 ——— determinare velimus, majoribus tabulis uti oportet; unde faciamus sequentes hypothefes $10''$ differentes

$s = 54^\circ, 18', 0''$	$s = 54^\circ, 18', 10''$
feu	feu
$s = 195480''$	$s = 195490''$
$2s = 108^\circ, 36', 0''$	$2s = 108^\circ, 36', 20''$
$compl. = 71^\circ, 24', 0''$	$compl. = 71^\circ, 23', 40''$
$l.s = 5,2911023304$	$5,2911245466$
subtrahe $5,3144251332$	$5,3144251332$
$9,9766771972$	$9,9766994134$
$l.sin.2s = 9,9767022291$	$9,9766880552$
$+ 250319$	$- 113582$
113582	

$$363901 : 250319 = 10'' : 6'', 52''', 43'''' , 33'''''.$$

Erit ergo $s = 54^\circ, 18', 6'', 52''', 43'''' , 33'''''$;
 ideoque angulus $ACB = 108^\circ, 36', 13'', 45''', 27'''' , 6'''''$,
 ejusque complementum $= 71, 23, 46, 14, 32, 54$,
 cujus sinus Logarithmus, seu
 $l. sin. 2s = 9,9766924791$,
 & ipse

$$\text{sinus} = 0,9477470.$$

Deinde erit

$$\text{sin. } s = AF = BF = 0,8121029,$$

ideoque ejus duplum, seu

$$\text{Chorda } AB = 1,6242058.$$

Præterea vero erit

$$\text{Cosinus } CF = 0,5335143.$$

Sicque vero proxime Sector quaesitus construi poterit. Q. E. I.

533. Simili modo determinari potest Sinus, quo Circuli quadrans in duas partes æquales secatur.

P R O B L E M A I I I.

T A B.
XXVIII

In quadrante Circuli ACB applicare Sinum DE qui Aream
 Fig. II 3, 2 quadrantis in duas partes æquales biseccet.

S O L U T I O

Sit Arcus $AE = s$; erit $BE = \frac{\pi}{2} - s$, ob $AEB = \frac{\pi}{2}$; & Area quadrantis $= \frac{1}{4} \pi$. Jam Area Sectoris ACE est $= \frac{1}{2} s$, a qua Triangulum $CDE = \frac{1}{2} \cdot \sin.s \cdot \cos.s$ subtractum relinquet spatium $ADE = \frac{1}{2} s - \frac{1}{2} \cdot \sin.s \cdot \cos.s$, cujus duplum dare debet quadrantem: ex quo erit $\frac{1}{4} \pi = s - \frac{1}{2} \cdot \sin.2s$: ergo $s - \frac{1}{4} \pi = \frac{1}{2} \cdot \sin.2s$. Ponatur Arcus $s - \frac{1}{4} \pi = s - 45^\circ = u$: erit $2s = 90 + 2u$; ideoque esse oportet $u = \frac{1}{2} \cdot \cos.2u$, & $2u = \cos.2u$. Cum ergo Arcus requiratur, qui suo Cosinui æquetur, eumque problemate primo invenimus, erit $2u = 42^\circ, 20', 47'', 14'''$, & $u = 21^\circ, 10', 23'', 37'''$. Quocirca erit Arcus $AE = s = 66^\circ, 10', 23'', 37'''$, & Arcus $BE = 23^\circ, 49', 36'', 23'''$. Hinc erit Radii pars $CD = 0,4039718$, & $AD = 0,5960281$, atque Sinus $DE = 0,9147711$. Hoc ergo modo, quo Circuli quadrans bifecatur, totus Circulus secabitur in 8 partes æquales. Q. E. F.

534. Quemadmodum Circulum omnis recta per Centrum ducta bifariam secat, ita ex quovis Peripheriæ puncto rectæ educi poterunt, quæ Circulum in tres pluresve partes æquales fecent. Inquiramus in quadrifecionem, ac resolvamus.

P R O B L E M A I V.

Proposito semicirculo $AEDB$ ex puncto A educere Chordam AD quæ Arcam semicirculi in duas partes æquales fecet.

TAB.
XXVIII
Fig. 114.

S O L U T I O.

Sit Arcus quæsitus $AD = s$; ductoque Radio CD , erit area

LIB. II. area Sectoris $ACD = \frac{1}{2} s$, a qua auferatur Triangulum

$ACD = \frac{1}{2} AC \cdot DE = \frac{1}{2} \cdot \sin.s$, remanebitque Segmen-

tum $AD = \frac{1}{2} s - \frac{1}{2} \cdot \sin.s$, quod æquale esse debet se-

missi semicirculi ADB , at area semicirculi est $= \frac{1}{2} \pi$: unde

erit $s - \sin.s = \frac{1}{2} \pi = 90^\circ$, ideoque $s - 90^\circ = \sin.s$. Po-

natur $s - 90^\circ = u$; erit $\sin.s = \cos.u$, & hanc ob rem $u =$

$\cos.u$. Per Problema ergo primum erit $u = 42^\circ, 20', 47'', 14'''$;

hincque $s =$ angulo $ACD = 132^\circ, 20', 47'', 14'''$, & angulus

$BCD = 47^\circ, 39', 12'', 46'''$. Ipsa vero Corda AD erit $=$

1, 8295422. Q. E. F.

535. Sic igitur in Circulo Segmentum abscinditur cujus area fit totius Circuli pars quarta, Segmentum autem semissi Circuli æquale est ipse semicirculus ejusque Corda Diameter. Simili modo Segmentum inveniri potest, quod sit triens totius Circuli, quod sequenti Problemate investigemus.

PROBLEMA V.

TAB. XXIX. Ex puncto Peripherie A educere duas Cordas AB, AC, quibus area Circuli in tres partes æquales dividatur.
Fig. 115.

SOLUTIO.

Posito Circuli Radio $= 1$, & hemiperipheria $= \pi$, fit Arcus AB vel $AC = s$; eritque area Segmenti AEB vel $AFC =$

$\frac{1}{2} s - \frac{1}{2} \sin.s$: at area Circuli est $= \pi$; unde, cum Segmenti

AEB area debeat esse triens Circuli, fiet $\frac{1}{2} s - \frac{1}{2} \sin.s =$

$\frac{\pi}{3} = 60^\circ$; seu, $s - \sin.s = 120^\circ$, ideoque $s - 120^\circ =$

$\sin.s$. Sit $s - 120^\circ = u$, erit $u = \sin.(u + 120) = \sin.(60 - u)$.

Arcus

Arcus ergo u quaeri debet, qui sit æqualis finui anguli 60° — u . CAP. XXII.
 Erit ergo u minor quam 60° ; ad quem Arcum inveniendum faciamus sequentes positiones

$u = 20^\circ$	$u = 30^\circ$	$u = 40^\circ$
$60 - u = 40^\circ$	$60 - u = 30^\circ$	$60 - u = 20^\circ$
$l. u = 1,3010300$	$1,4771213$	$1,6020600$
subtrahe $1,7581226$	$1,7581226$	$1,7581226$
$l. u = 9,5429074$	$9,7189987$	$9,8439374$
$l. \sin.(60 - u) = 9,8080575$	$9,6989700$	$9,5340517$
$+ 2651601$	$- 200287$	$- 3098857$

Patet ergo angulum u aliquanto esse minorem quam 30° , & calculo subducto, major esse debet quam 29° sit ergo $u = 29^\circ$

$60 - u = 31^\circ$
$l. u = 1,4623980$
subtrahe $1,7581226$
$l. u = 9,7042754$
$l. \sin.(60 - u) = 9,7118393$
$+ 75639$
$- 200287$
$275926 : 75639 = 1^\circ : 16', 26''.$

Foret ergo angulus $u = 29^\circ, 16', 26''$, ad quem accuratius inveniendum, faciamus has hypothèses uno tantum minuto differentes

$u = 29^\circ, 16'$	$u = 29^\circ, 17'$
ku	feu
$u = 1756'$	$u = 1757'$
$60 - u = 30^\circ, 44'$	$60 - u = 30^\circ, 43'$
$l. u = 3, 2445245$	$3, 2447718$
subtrahe $3, 5362739$	$3, 5362739$
$l. u = 9, 7082506$	$9, 7084979$
$l. \sin.(60 - u) = 9, 7084575$	$9, 7082450$
$+ 2069$	$- 2529$
2529	

$4598 : 2069 = 1' : 27'', 0''.$
 Erit ergo vere $u = 29^\circ, 16', 27'', 0''$,
 hincque

LIB. II.

Arcus $s = AEB = 149^{\circ}, 16', 27'', 0''' = AFC$;
unde resultat

Arcus $BC = 61^{\circ}, 27', 6'', 0'''$,
ipsa vero

Chorda $AB = AC = 19285340$. Q. E. F.

536. His Problematis, quibus Arcus quispiam queritur dato Sinui vel Cofinui æqualis, adjungamus sequens, quo quidem idem negotium proponitur, attamen major difficultas occurrit.

PROBLEMA VI.

TAB. XXIX.
Fig. 116. In semicirculo AEB Arcum AE abscindere, ita ut, ducto ejus Sinu ED, Arcus AE sit equalis summe rectorum AD + DE.

SOLUTIO.

Quoniam statim patet hunc Arcum quadrante esse majorem, quæramus ejus Complementum BE , & vocemus Arcum $BE = s$, ita ut sit Arcus $AE = 180^{\circ} - s$, atque ob $AC = 1$, $CD = \text{cos}.s$, $DE = \text{sin}.s$, erit $180^{\circ} - s = 1 + \text{cos}.s + \text{sin}.s$. At, est $\text{sin}.s = 2 \text{sin}.\frac{1}{2}s \cdot \text{cos}.\frac{1}{2}s$, & $1 + \text{cos}.s = 2 \text{cos}.\frac{1}{2}s \cdot \text{cos}.\frac{1}{2}s$; unde fit $180^{\circ} - s = 2 \text{cos}.\frac{1}{2}s (\text{sin}.\frac{1}{2}s + \text{cos}.\frac{1}{2}s)$. At, est $\text{cos}.(45^{\circ} - \frac{1}{2}s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \text{cos}.\frac{1}{2}s + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \text{sin}.\frac{1}{2}s$: ergo $\text{sin}.\frac{1}{2}s + \text{cos}.\frac{1}{2}s = \sqrt{2} \cdot \text{cos}.(45^{\circ} - \frac{1}{2}s)$: unde erit $180^{\circ} - s = 2\sqrt{2} \cdot \text{cos}.\frac{1}{2}s \times \text{cos}.(45^{\circ} - \frac{1}{2}s)$. Hac facta reductione, faciamus sequentes positiones

$$\frac{1}{2}s =$$

$\frac{1}{2} s = 20^\circ$ $45^\circ - \frac{1}{2} s = 25^\circ$ $180 - s = 140^\circ$ $l.(180 - s) = 2, 1461280$ subtrahere 1, 7581226 <hr/> $l.(180 - s) = 0, 3880054$ $l.\text{cof.} \frac{1}{2} s = 9, 9729858$ $l.\text{cof.} (45^\circ - \frac{1}{2} s) = 9, 9572757$ $l.2\sqrt{2} = 0, 4515450$ 0, 3818065 <hr/> Error + 61989 6704 <hr/> $68693 : 61989 = 1^\circ : 54'$	$\frac{1}{2} s = 21^\circ$ $45^\circ - \frac{1}{2} s = 24^\circ$ $180 - s = 138^\circ$ $2, 1398791$ $1, 7581226$ <hr/> $0, 3817565$ <hr/> $9, 9701517$ $9, 9607302$ $0, 4515450$ <hr/> $0, 3824269$ <hr/> — 6704 <hr/>
---	--

Hinc continetur $\frac{1}{2} s$ intra limites $20^\circ, 54'$, & $20^\circ, 55'$, ideoque sequentes hypotheses fiant

$\frac{1}{2} s = 20^\circ, 54'$ $45^\circ - \frac{1}{2} s = 24^\circ, 6'$ $s = 41^\circ, 48'$ $180 - s = 138^\circ, 12'$ feu $180 - s = 8292'$ $l.(180 - s) = 3, 9186593$ subtrahere 3, 5362739 <hr/> $0, 3823854$ $l.\text{cof.} \frac{1}{2} s = 9, 9704419$ $l.\text{cof.} (45 - \frac{1}{2} s) = 9, 9603919$ $l.2\sqrt{2} = 0, 4515450$ 0, 3823788 <hr/> Error + 66 1065 <hr/> $1131 : 66 = 1' : 3'', 30'''$	$\frac{1}{2} s = 20^\circ, 55'$ $45 - \frac{1}{2} s = 24^\circ, 5'$ $s = 41^\circ, 50'$ $180 - s = 138^\circ, 10'$ feu $180 - s = 8290'$ $3, 9185545$ $3, 5362739$ <hr/> $0, 3822806$ <hr/> $9, 9703937$ $9, 9604484$ $0, 4515450$ <hr/> $0, 3823871$ <hr/> — 1065 <hr/>
---	---

LIB. II. Hanc ob rem erit $\frac{1}{2} s = 20^\circ, 54', 3'', 30'''$,

inde

$$s = 41^\circ, 48', 7'', 0''' = BE$$

ideoque Arcus quæsitus

$$AE = 138^\circ, 11', 53'', 0'''.$$

Erit vero Linea

$$DE = 0,6665578, \text{ \& } AD = 1,7454535. \text{ Q. E. F.}$$

§ 37. Comparemus nunc Arcus cum suis Tangentibus; & cum in primo quadrante Tangentes sint Arcubus minores; quæramus Arcum, qui suæ Tangentis semissi sit æqualis, quo solvetur

PROBLEMA VII.

TAB. *Abfcindere Sectorem ACD, qui sit semissis Trianguli ACE*
 XXIX. *a Radio AC, Tangente AE & Secante CE comprehenss.*
 Fig. 117.

SOLUTIO.

Posito Arcu $AD = s$, erit Sector $ACD = \frac{1}{2}s$, Triangulum vero $ACE = \frac{1}{2} \cdot \text{tang. } s$: unde debet esse $\frac{1}{2} \cdot \text{tang. } s = s$, seu $2s = \text{tang. } s$. Faciamus ergo has hypotheses

$s = 60^\circ$	$s = 70^\circ$	$s = 66^\circ$	$s = 67^\circ$
$l. 2s = 2,0791812$	$2,1461280$	$2,1205739$	$2,1271048$
<u>$1,7581226$</u>	<u>$1,7581226$</u>	<u>$1,7581226$</u>	<u>$1,7581226$</u>
$l. 2s = 0,3210586$	$0,3880054$	$0,3624513$	$0,3689822$
$l. \text{tang. } s = 0,2385606$	$0,4389341$	$0,3514169$	$0,3721481$
<u>$+ 824980$</u>	<u>$- 509287$</u>	<u>$+ 110344$</u>	<u>$- 31659$</u>

Hinc ipsius s reperiuntur limites arciores $66^\circ, 46'$, & $66^\circ, 47'$: quare fiat

$s = 66^{\circ}, 46'$	$s = 66^{\circ}, 47'$
feu	feu
$s = 4006'$	$s = 4007'$
$2s = 8012'$	$2s = 8014'$
$l. 2s = 3, 9037409$	$3, 9038493$
$3, 5362739$	$3, 5362739$
$l. 2s = 0, 3674670$	$0, 3675754$
$l. \text{tang. } s = 0, 3672499$	$0, 3675985$
Error $+ 2171$	$- 231$
$\frac{231}{2402}$	

$$2402 : 2171 = 1' : 54'', 14'''.$$

unde erit

$$\text{Arcus } s = AD = 66^{\circ}, 46', 54'', 14''',$$

hincque

Tangens $AE = 2, 3311220$. Q. E. F.
538. Proponatur nunc sequens.

P R O B L E M A V I I I.

Proposito Circuli quadrante ACB invenire Arcum AE, qui equalis sit Chordæ suæ AE ad occursum F usque productæ.

T A B.
XXIX.
Fig. 118.

S O L U T I O.

Sit Arcus $AE = s$, erit ejus Chorda $AE = 2 \cdot \sin. \frac{1}{2} s$, finus versus $AD = 1 - \cos. s = 2 \cdot \sin. \frac{1}{2} s \cdot \sin. \frac{1}{2} s$: unde Triangula similia ADE, ACF , dabunt $2 \cdot \sin. \frac{1}{2} s \cdot \sin. \frac{1}{2} s$: $2 \cdot \sin. \frac{1}{2} s = 1 : s$, eritque ergo $s \cdot \sin. \frac{1}{2} s = 1$. Fiant ergo sequentes positiones

LIB. II.

	$s = 70^\circ$	$s = 80^\circ$	$s = 84^\circ$	$s = 85^\circ$
$l.s$	1,8450980	1,9030900	1,9242793	1,9294189
subtrahe	1,7581226	1,7581226	1,7581226	1,7581226
	0,0869754	0,1449674	0,1661567	0,1712963
<i>l. fin.</i> $\frac{1}{2} s$	$= 9,7585913$	$= 9,8080675$	$= 9,8255109$	$= 9,8296833$
	9,8455667	9,9530349	9,9916676	0,0009796
Error +	0,1544332	0,0469650	+ 83223	— 9796

Unde s continetur intra limites $84^\circ, 53'$ & $84^\circ, 54'$

Sit ergo

	$s = 84^\circ, 53'$	$s = 84^\circ, 54'$
	feu	feu
	$s = 5093'$	$s = 5094'$
$\frac{1}{2} s$	$= 42^\circ, 26 \frac{1}{2}'$	$= 42^\circ, 27'$
$l.s$	$= 3,7069737$	$= 3,7070589$
subtrahe	$3,5362739$	$3,5362739$
	$0,1706998$	$0,1707850$
<i>l. fin.</i> $\frac{1}{2} s$	$= 9,8292003$	$= 9,8292694$
	$0,9999001$	$0,0000544$
Error	+ 998	— 544

Hincque oritur

$$\text{Arcus } s = AE = 84^\circ, 53', 38'', 51''',$$

&

$$\text{Arcus } BE = 50^\circ, 6', 21'', 9'''. \quad Q. E. I.$$

539. Quanquam in primo quadrante omnes Arcus sunt suis Tangentibus minores, tamen in sequentibus quadrantibus dantur ejusmodi Arcus qui sint æquales suis Tangentibus, quos in sequenti Problemate methodo ex seriebus petita investigemus.

PROBLEMA IX.

Invenire omnes Arcus, qui Tangentibus suis sint æquales.

SOLUTIO.

Primus Arcus hac proprietate præditus est infinite parvus.
Tum

Tum in secundo quadrante, quia hic Tangentes sunt negati-
væ, datur nullus istiusmodi Arcus; in tertio vero quadrante (A P. XXII.)
dabitur unus 270° aliquanto minor; porro dabuntur ejusmodi
Arcus in quinto, septimo, &c. Ponatur quarta Peripheriæ pars
 $= q$, & Arcus quæsitus contineantur in hac forma $(2n+1)q - s$,

ita ut sit $(2n+1)q - s = \cot. s = \frac{1}{\tan. s}$. Sit $\tan. s = x$; erit

$s = x - \frac{1}{2} x^3 + \frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{7} x^7 + \&c.$, ideoque $(2n+1)q$

$= \frac{1}{x} + x - \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{7} x^7 + \&c.$ Patet au-
tem, ob s Arcum eo minorem, quo major fuerit numerus n ,
fore x quantitatem valde parvam ideoque proxime $x =$

$\frac{1}{(2n+1)q}$; seu $\frac{1}{x} = (2n+1)q$; propius autem invenitur

$\frac{1}{x} = (2n+1)q - s = (2n+1)q - \frac{1}{(2n+1)q} - \frac{2}{3(2n+1)^3 q^3} -$

$\frac{13}{15(2n+1)^5 q^5} - \frac{146}{105(2n+1)^7 q^7} - \frac{2343}{945(2n+1)^9 q^9} - \&c.$

Cum ergo sit $q = \frac{\varpi}{2} = 1,5707963267948$, erit Arcus quæ-

fitus $= (2n+1) 1,57079632679 - \frac{1}{2n+1} 0,63661977 -$

$0,17200817 - 0,09062596 - \frac{0,05892834}{(2n+1)^7} - \frac{0,04258543}{(2n+1)^9} -$

&c. Vel si isti termini, qui in partibus Radii exprimentur,
ad mensuram Arcuum reducantur, erit Arcus quæsitus in ge-

nerere consideratus $= (2n+1)90^\circ - \frac{131313''}{2n+1} - \frac{35479''}{(2n+1)^3} -$

$\frac{18692''}{(2n+1)^5} - \frac{12155''}{(2n+1)^7} - \frac{8784''}{(2n+1)^9}$. Arcus ergo quæstioni sa-

tisfacientes ordine sunt.

LIB. II. <hr/>	I.	1. 90°	— 90°
	II.	3. 90°	— 12°, 32', 48"
	III.	5. 90°	— 7, 22, 32
	IV.	7. 90°	— 5, 14, 22
	V.	9. 90°	— 4, 3, 59
	VI.	11. 90°	— 3, 19, 24
	VII.	13. 90°	— 2, 48, 37
	VIII.	15. 90°	— 2, 26, 5
	IX.,	17. 90°	— 2, 8, 51
	X.	19. 90°	— 1, 55, 16

540. Hujusmodi quæstiones plures non propono, cum methodus eas resolvendi ex his exemplis clare perspiciatur. Ceterum hæc Problemata in hunc finem potissimum sunt excogitata, ut Circuli natura, cujus quadratura omnibus methodis adhuc usitatis frustra fuit tentata, penitus inspiciatur. Si enim accidisset, ut in solutione cujuspiam Problematis, vel Arcus cum tota Circumferentia commensurabilis, vel ejus Sinus Tangensve per Radium construibilis prodisset, tum utique species quædam quadraturæ Circuli haberetur. Scilicet, si in solutione Problematis VI. Sinus *DE*, qui prodit = 0,6665578, inventus fuisset = 0,6666666 = $\frac{2}{3}$, elegans certe Circuli proprietas innotesceret, Arcus quippe *AE* construi posset Lineæ rectæ $AD + DE = 1 + \frac{2}{3} + \sqrt{\frac{5}{9}}$ æqualis. Nulla vero etiamnum ratio patet, quæ hujusmodi Circuli quadraturam impossibilem esse evincat: atque, si talis detur, nulla alia via, præter hanc, quam hoc Capite aperuimus, ad eam investigandam magis apta videtur.

TAB.
XXIX.
Fig. 116.

FINIS LIBRI SECUNDI.

A P P E N D I X

D E

S U P E R F I C I E B U S.

C A P U T I.

C A P. I.

De Superficiebus Corporum in genere.

1. **Q**Uæ in superiori Sectione de Lineis curvis sunt tradita earumque ad æquationes revocandarum ratione, latissime quidem patent, atque ad omnes Lineas curvas, quarum cuncta puncta in eodem plano sint posita, extenduntur. Verum, si tota Linea curva non fuerit in eodem plano sita, tum præcepta supra data non sufficiunt ad proprietates ejusmodi Curvarum eruendas. Hujus generis Curvæ duplicem habent curvaturam; hocque nomine de iis eximium scripsit tractatum Acutissimus Geometra CLAIRAUT. Cum autem hæc materia maxime sit connexa cum natura Superficierum, de qua hac sectione exponere constitui, seorsim eam non pertractabo, sed ejus explicationem cum sequenti de Superficiebus doctrina jungam.

2. Quemadmodum Lineæ sunt vel rectæ vel curvæ, ita Superficies sunt vel planæ, vel non planæ. Non planas autem voco, quæ vel convexæ sunt vel concavæ, vel utriusque naturæ participes. Sic, Superficies externa Globi, Cylindri, & Coni, exceptis basibus, est convexa; interna autem catini Superficies concava. Quemadmodum porro Linea recta est, cujus terna quæque puncta in directum sunt posita; ita Superficies plana est cujus quaterna quæque puncta in eodem plano sunt posita; ex quo perspicuum est Superficiem non planam, hoc est sive convexam sive concavam, esse cujus non omnia quaterna puncta in eodem plano sunt sita.

3. Superficies igitur non plana qualis sit facillime intelligitur si, quantum a Superficie plana ubique discrepet, cognoverimus. Simili scilicet modo, quo indolem Linearum curvarum ex distantis, quibus ejus quæque puncta a Linea recta pro Axe assumta distant, colligimus; ita naturam Superficierum

APPEND.

æstinari conveniet ex singulorum ejus punctorum distantis a Superficie plana pro lubitu assumta. Proposita ergo quacunque Superficie, cujus indolem definiri oporteat, pro arbitrio eligatur Superficies plana, ad quam ex singulis Superficii propositæ punctis perpendiculara ducta concipiantur: quo factò, si cujusvis horum perpendicularorum longitudo per æquationem determinari queat, naturam Superficii hac ipsa æquatione exprimi censebimus. Ex tali enim æquatione vicissim omnia Superficii puncta assignari poterunt, atque ideo ipsa Superficies determinabitur.

T A B.
X X X.
Fig. 119.

4. Repræsentet planum tabulæ eam Superficiem planam, ad quam singula cujusque Superficii propositæ puncta referamus. Sit M punctum quodcunque Superficii propositæ, quod extra planum tabulæ situm concipiatur, unde ad hoc planum perpendicularis demittatur MQ , plano in puncto Q occurrens. Jam, ad situm hujus puncti Q calculo exprimendum, assumatur in plano tabulæ recta quæpiam AB pro Axe, ad quem ex puncto Q recta normalis ducatur QP . Denique in ipso Axe AB sumatur punctum quodvis A pro initio Abscissarum: quo factò, situs puncti M innotescet si noverimus longitudes trium istarum Linearum AP , PQ & QM ; sicque tribus Coordinatis inter se normalibus situs cujusque Superficii puncti M simili modo determinabitur, quo Linearum curvarum in plano sitarum singula puncta per duas Coordinatas inter se normales exhiberi solent.

5. Cum igitur habeamus tres Coordinatas AP , PQ & QM , ponamus $AP = x$, $PQ = y$, & $QM = z$; ex hisque indolem Superficii propositæ intelligemus, si, sumtis pro lubitu binis x & y , noverimus quanta futura sit tertia z ; hoc enim modo omnia Superficii puncta M determinare poterimus. Natura ergo cujusvis Superficii exprimitur æquatione, qua Coordinata z definitur per binas reliquas x & y una cum constantibus. Hinc pro quavis Superficie proposita variabilis z æquabitur Functioni cuidam binarum variabilium x & y . Atque vicissim, si z æqualis fuerit Functioni cui-

cunque

cunque ipsarum x & y , tum ista æquatio exhibebit Superficiem quampiam, cujus natura ex ipsa illa æquatione innotescet. Substituendis enim pro x & y omnibus, quos recipere possunt, valoribus, tam affirmativis quam negativis, omnia plani assumti puncta Q obtinebuntur: tum vero ex æquatione ipsius z per x & y constabit ubique longitudo perpendiculari $QM = z$, donec ad Superficiem pertingat: qui ipsius z valor si fuerit affirmativus, punctum Superficiæ M supra planum APQ , erit situm; sin autem sit negativus, infra hoc planum cadet; si evanescat, punctum Superficiæ M in hoc ipso plano reperietur; at, si fuerit imaginarius, tum puncto Q nullum prorsus Superficiæ punctum M respondebit. Quod si autem eveniat, ut z habeat plures valores reales, tum recta ad planum normalis per punctum Q ducta Superficiem in pluribus punctis M trajiciet.

6. Quod igitur ad varias Superficierum naturas attinet, hic statim se offert distinctio in continuas seu regulares, & discontinuas seu irregulares. Superficies scilicet continua erit, cujus omnia puncta per eandem æquationem inter z & x & y exprimentur; seu, ubi z est eadem Functio ipsarum x & y pro omnibus Superficiæ punctis. Superficies autem irregularis est cujus variæ partes per diversas Functiones exhibentur; uti, si proposita fuerit Superficies, quæ in uno loco sit spherica, in alio conica, seu cylindrica, seu plana. Hic autem Superficies irregulares penitus excludimus, atque ad solas regulares, quarum natura una quadam constanti æquatione contineatur, respiciemus. His enim pertractatis, quoniam Superficies irregulares ex partibus variarum regularium sunt constatæ, etiam istas facile dijudicare licebit.

7. Superficierum autem regularium primaria divisio instituitur in algebraicas & transcendentis. Superficies autem algebraica vocatur, cujus natura exprimitur per æquationem algebraicam inter Coordinatas x , y & z ; seu, quando z æqualis est Functioni algebraicæ ipsarum x & y . Contra igitur, si z non fuerit Functio algebraica ipsarum x & y ; seu, si in æqua-

APPEND. tione inter x , y , & z insint quantitates transcendentes, veluti a Logarithmis & Arcubus circularibus pendentes, tum Superficies, cujus natura hujusmodi æquatione exprimitur, erit transcendens. Talis erit Superficies, si fuerit $z = x.l.y$; seu $z = y^x$; seu $z = y.sm.x$. Facile autem intelligitur Superficies algebraicas ante tractari oportere, quam ad transcendentes progrediamur.

8. Deinde ad naturam Superficiei cognoscendam, imprimis attendendum est, qualis sit Functio z ipsarum x & y , ratione numeri valorum, quos continet. Hic igitur primum occurrunt eæ Superficies, pro quibus z æquatur Functio uniformi ipsarum x & y . Sit P hujusmodi Functio uniformis, seu rationalis, ipsarum x & y ; atque, si fuerit $z = P$, singulis punctis plani Q totidem respondebunt Superficiei puncta; seu, quælibet recta ad planum APQ normalis Superficiem in unico puncto trajiciet. Neque vero hoc casu usquam valor rectæ QM fieri poterit imaginarius; sed omnes istiusmodi rectæ puncta Superficiei realia præbebunt. Interim tamen ista Functio diversitas non essentialem varietatem inter Superficies producit; pendet enim a situ plani APQ , qui, perinde ac Axis, est arbitrarius; ita ut, si Superficies eadem ad aliud planum referatur, Functio z quæ erat uniformis, evadere possit utcunque multiformis.

9. Sint P & Q Functioes quæcunque uniformes ipsarum x & y ; atque, si fuerit $zz - Pz + Q = 0$, tum rectæ per singula plani puncta Q normaliter ductæ Superficiem, vel in duobus punctis secabunt, vel nusquam: habebit enim z duos valores, qui vel ambo erunt reales, vel ambo imaginarii. Simili modo si, denotantibus P , Q & R Functioes uniformes ipsarum x & y , fuerit $z^3 - Pz^2 + Qz - R = 0$; tum erit z Functio triformis, & quælibet recta QM Superficiem secabit vel in tribus punctis, si omnes radices æquationis fuerint reales; vel tantum in unico, si scilicet binæ radices fuerint imaginariæ. Similique modo erit judicandum,

si

si z definiatur per æquationem, in qua plures obtineat dimensiones. Quam multiformis igitur futura sit Functio z facillime cognoscetur, si æquatio inter x & y & z , ad rationalitatem perducatur. CAP. I.

10. De cetero, sicuti in æquationibus pro Lineis curvis binas Coordinatas inter se permutari posse vidimus, ita in æquatione quavis pro Superficie tres Coordinatæ x , y , & z inter se sunt permutabiles. Primo enim, si in plano APQ altera recta Ap ad AP normalis pro Axe assumatur, erit nunc $Ap = y$, & $pQ = x$; sicque binæ x & y inter se sunt permutatæ. Reliquæ permutationes omnes intelligentur complendo parallelepipedon rectangulum $ApQM\xi\pi qPA$; in quo primum spectanda veniunt tria plana fixa inter se normalia $APQp$, $APq\pi$, & $Ap\xi\pi$; ad quæ singula, quemadmodum referatur Superficies proposita cujus punctum est M , eadem æquatio inter x , y , & z declarat. In unoquoque autem plano duplex datur Axis, uterque initium habens in puncto A , unde sex diversæ relationes inter tres Coordinatas resultant.

Coordinatæ erunt

$$\text{Pro plano } APQp \quad \text{vel } \begin{cases} AP = x \\ pQ = y \\ QM = z \end{cases}$$

$$\text{vel } \begin{cases} Ap = y \\ pQ = x \\ QM = z \end{cases}$$

$$\text{Pro plano } APq\pi \quad \text{vel } \begin{cases} AP = x \\ Pq = z \\ qM = y \end{cases}$$

$$\text{vel } \begin{cases} A\pi = z \\ \varpi q = x \\ qM = y \end{cases}$$

Pro

APPEND.

$$\text{vel } \begin{cases} Ap = y \\ p\xi = z \\ \xi M = x \end{cases}$$

Pro plano $Ap\xi\pi$

$$\text{vel } \begin{cases} A\pi = z \\ \pi\xi = y \\ \xi M = x \end{cases}$$

Quod si autem a puncto fixo A ad punctum Superficie M ducatur recta AM , erit ea $= \sqrt{(xx + yy + zz)}$.

11. Eadem ergo æquatio inter Coordinatas x , y , & z cognitionem Superficie ad tria plana exhibet, quæ inter se sunt normalia atque se invicem in puncto A decussant. Quemadmodum scilicet variabilis z distantiam cujusque Superficie puncti M a plano APQ exhibet, ita variabilis y ejusdem puncti M distantiam a plano APq , & variabilis x a plano $Ap\xi$ præbet. Quod si autem noverimus, quantis intervallis punctum M distet ab unoquoque horum trium planorum, tum simul ejus verus situs innotescit. Hæc igitur tria plana, ad quæ Superficies quævis per æquationem trium variabilium x , y & z refertur, imprimis notari debent; quorum si unum, uti APQ , fuerit horizontale, duo reliqua erunt verticalia, alterum scilicet horizontali secundum rectam AP alterum secundum rectam Ap insister.

12. Constitutis ergo his tribus planis inter se normalibus, ad quæ Superficies proposita referatur, ex singulis ejus punctis M ad ista plana APQ , APq , & $Ap\xi$ ducantur rectæ normales MQ , Mq , & $M\xi$, quæ erunt $MQ = z$, $Mq = y$, & $M\xi = x$. Deinde, completo parallelepipedo, habebuntur tres rectæ istis æquales, quæ ex puncto fixo A egrediantur, scilicet $AP = x$, $Ap = y$, & $A\pi = z$, ex quibus cognitio situs puncti M determinatur. Manifestum autem est, si istæ variabiles x , y , & z , dum in plagas, quas Figura indicat, vergunt, affirmativæ censeantur, tum earum valores, si in plagas contrarias dirigantur, negativos censerī oportere.

13. Si in æquatione inter tres variables x , y & z , ea quæ ad planum APQ est normalis, nempe z , ubique pares habeat dimensiones, tum geminos habebit valores æquales, alterum affirmativum alterum negativum. Superficies igitur ita erit comparata, ut ad utramque plani APQ partem sit sui similis & æqualis, atque adeo Corpus, quod ista Superficie terminatur, sectione secundum planum APQ facta, in duas partes similes & æquales dividetur. Quemadmodum ergo in Figuris planis ea Linea recta, qua Figura in duas partes similes & æquales dirimebatur, Diameter est appellata; ita in solidis id planum, quo Corpus in duas partes similes dividitur, *Diametræle* vocemus. Quare, si variabilis z in æquatione ubique pares habeat dimensiones, tum planum APQ , erit diametræle.

14. Simili modo intelligitur, si in æquatione pro Superficie variabilis y , quæ ad planum APq est normalis, ubique pares habeat dimensiones, tum planum APq fore diametræle. Sin autem variabilis x pares ubique habeat dimensiones, tum planum $Ap\xi$ erit diametræle. Ex æquatione ergo pro quavis Superficie inter tres variables x , y , & z data statim apparet, utrum ex tribus planis APQ , APq , $Ap\xi$, sit diametræle an secus. Fieri autem potest, ut duo, imo omnia tria hæc plana, sint diametrælia. Scilicet, pro Globo, cujus Centrum sit in A , ob radium $AM = \sqrt{xx + yy + zz} = a$, erit $xx + yy + zz = aa$, unde singulis hisce tribus planis Globus in duas partes similes & æquales dispertietur.

15. Ad Figuram Superficiæ, quæ in proposita æquatione continetur, cognoscendam, ad tria illa plana inter se normalia imprimis attendi oportet, quæ in Figura repræsentantur per $QQ'Q''Q'''$, & $TT'T'T'$, atque $VV'V''V'''$, atque se mutuo in puncto A intersecant. Hæc tria plana, si in infinitum quaquaversus producta concipiuntur, universum spatium dividunt in octo regiones, quæ in Figura exhibentur literis AX , AX^1 , AX^2 , AX^3 , AX^4 , AX^5 , AX^6 , & AX^7 . Quod, si jam in prima regione AX variables x , y , & z

Euleri *Introduct. in Anal. infin. Tom. II.* T t affirmat.

T A B.
X X X.
Fig. 120.

APPEND. affirmativos valores habere ponantur, in reliquis regionibus una vel duæ vel omnes tres fient negativæ. Ratio autem horum valorum clarissime ex sequenti schemate perspicietur

Regio AX		Regio AX^1		Regio AX^2		Regio AX^3	
$AP = +x$	$AR = +y$	$AP^1 = -x$	$AR^1 = +y$	$AP^2 = +x$	$AR^2 = +y$	$AP^3 = -x$	$AR^3 = +y$
$AS = +z$		$AS = +z$		$AS^2 = -z$		$AS^3 = -z$	
Regio AX^4		Regio AX^5		Regio AX^6		Regio AX^7	
$AP = +x$	$AR^4 = -y$	$AP^5 = -x$	$AR^5 = -y$	$AP^6 = +x$	$AR^6 = -y$	$AP^7 = -x$	$AR^7 = -y$
$AS = +z$		$AS = +z$		$AS^6 = -z$		$AS^7 = -z$	

TAB. 16. Commodius autem erit octo has diversas regiones numeris insignire, quo facilius, de quam sermo fit, indicare queamus. Cum igitur octo istæ regiones in puncto A sint confines; atque intersectione trium planorum inter se normalium distinguantur; plana autem hæc tribus rectis Pp, Qq, Rr sese in puncto A normaliter decussantibus determinantur, regiones illæ tribus litteris P, Q, R , vel majusculis vel minusculis definiri poterunt. Regio scilicet principalis, seu prima, PQR erit spatium, quod parallelepipedum ex tribus rectis AP, AQ, AR in infinitum productis formatum complectitur; & regio Pqr erit spatium, quod parallelepipedum ex tribus rectis Ap, Aq, Ar in infinitum productis formatum includet. Pofitis ergo tribus variabilibus $AP = x, AQ = y, AR = z$, erit utique $Ap = -x, Aq = -y, \& Ar = -z$. Sequenti ergo modo octo has regiones numeris distinguemus, ut sit

	prima I. PQR		secunda II. PQR
inter Coordinatas	$\left\{ \begin{array}{l} AP = + x \\ AQ = + y \\ AR = + z \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} AP = + x \\ AQ = + y \\ Ar = - z \end{array} \right.$	

	tertia III. PqR		quarta IV. pQR
inter Coordinatas	$\left\{ \begin{array}{l} AP = + x \\ Aq = - y \\ AR = + z \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} Ap = - x \\ AQ = + y \\ AR = + z \end{array} \right.$	

	quinta V. Pqr		sexta VI. pQr
inter Coordinatas	$\left\{ \begin{array}{l} AP = + x \\ Aq = - y \\ Ar = - z \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} Ap = - x \\ AQ = + y \\ Ar = - z \end{array} \right.$	

	septima VII. pqR		octava VIII. pqr
inter Coordinatas	$\left\{ \begin{array}{l} Ap = - x \\ Aq = - y \\ AR = + z \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} Ap = - x \\ Aq = - y \\ Ar = - z \end{array} \right.$	

17. Regiones istæ vel magis vel minus a se invicem discrepant. Primo nimirum dantur binæ regiones, quæ duas Coordinatas habent communes, unica discrepante; ideoque plano se invicem tangunt, quas vocemus *conjunctas*. Deinde, si duæ Coordinatæ fuerint diversæ, unicamque habeant communem, regiones Linea recta tantum se tangunt, quas vocemus *disjunctas*. Tertio, si omnes Coordinatæ signis dissentiant, regiones tantummodo in puncto *A* se tangunt, hasque *oppositas* vocabimus. Quæ jam regiones cuique sint conjunctæ vel disjunctæ vel oppositæ sequens tabella exhibebit.

APPEND.

<i>Regio.</i>	<i>Conjunctæ.</i>			<i>Disjunctæ.</i>			<i>Oppositæ.</i>
PQR I	PQr II	PqR III	pQR IV	Pqr V	pQr VI	pqR VII	pqr VIII
PQr II	PQR I	Pqr V	pQr VI	PqR III	pQR IV	pqr VIII	pqR VII
PqR III	Pqr V	PQR I	pqR VII	PQr II	pqR VIII	pQR IV	pQr VI
pQR IV	pQr VI	pqR VII	PQR I	pqr VIII	PQr II	PqR III	Pqr V
Pqr V	PqR III	PQr II	pqr VIII	PQR I	pqR VII	pQr VI	pQR IV
pQr VI	pQR IV	pqr VIII	PQr II	pqR VII	PQR I	Pqr V	pqR III
pqR VII	pqr VIII	PQR I	pqR III	PQr VI	pqr V	PQR I	PQr II
pqr VIII	pqR VII	pQr VI	Pqr V	pQR IV	PqR III	PQr II	PQR I

18. Patet ergo quamlibet regionem habere tres sibi conjunctas, totidem disjunctas, unicamque oppositam, atque ex Tabula præcedente statim perspicitur quemadmodum quælibet regio ad aliam quamcunque sit comparata. Odo autem, quem numeri regiones denotantes in ista Tabula tenent, attentione est dignus; qui ut melius in oculos incurrat, eosdem numeros eodem ordine quadrato sequenti inclusi.

1	2	3	4	5	6	7	8
2	1	5	6	3	4	8	7
3	5	1	7	2	8	4	6
4	6	7	1	8	2	3	5
5	3	2	8	1	7	6	4
6	4	8	2	7	1	5	3
7	8	4	3	6	5	1	2
8	7	6	5	4	3	2	1

Cujus indoles & proprietates levi attentione percipientur, usus vero in sequentibus uberius ob oculos ponetur.

19. Ante jam annotavimus si in æquatione variabilis z ubique habeat pares dimensiones, tum Superficiem duas esse habituram partes similes & æquales; pars scilicet in regione prima æqualis erit parti in secunda, similique modo regiones tertia & quinta, item quarta & sexta, ac denique septima & octava inter se convenient, uti quadrati binæ series ab 1 & 2 incipientes exhibent. Sin autem in æquatione variabilis y ubique pares habeat dimensiones, tum regio prima cum tertia, secunda cum quinta, quarta cum septima, & sexta cum octava congruet. Sed si x in æquatione ubique pares habeat dimensiones, tum regio prima cum quarta, secunda cum sexta, tertia, cum septima, & quinta cum octava congruet. Scilicet

si in æquatione pares ubique habeat dimensiones

z	variabilis y	x
convenient regiones	convenient regiones	convenient regiones
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
2, 1, 5, 6, 3, 4, 8, 7	3, 5, 1, 7, 2, 8, 4, 6	4, 6, 7, 1, 8, 2, 3, 5

20. Ut partes Superficiæ in regionibus disjunctis prima & quinta sitæ inter se sint æquales, tum æquationem ita comparatam esse oportet, ut maneat eadem, etiamsi binæ variabiles y & z negativæ accipiantur. Hoc igitur eveniet si ambæ y & z in singulis æquationis terminis vel pares ubique vel impares dimensiones junctim sumtæ constituent. Quod si autem regio prima congruat cum quinta, tum secunda cum tertia, quarta cum octava, & sexta cum septima convenient. Simili modo, si in æquatione pro Superficie binæ variabiles x & z vel parem ubique dimensionum numerum, vel imparem ubique adimpleant, tum regio prima cum sexta, secunda cum quarta, tertia cum octava, & quinta cum septima congruet. Scilicet

APPEND. *Si in æquatione pro Superficie ubique vel pares vel ubique impares adimpleant dimensiones*

y & z	variabiles x & z	x & y
congruent regiones	congruent regiones	congruent regiones
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
5, 3, 2, 8, 1, 7, 6, 4	6, 4, 8, 2, 7, 1, 5, 3	7, 8, 4, 3, 6, 5, 1, 2

Quod si autem omnes tres variables x , y , & z junctim considerata ubique vel pares vel ubique impares teneant dimensiones, tum convenient regiones opposita

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.

21. Si ex his conditionibus duæ vel tres simul in æquatione inesse deprehendantur, tum vel quaternæ vel omnes octo regiones partes Superficiæ similes & æquales continebunt. Scilicet

Si & x & y , seorsim considerata ubique pares obtineant dimensiones, tum sequentes quaternæ regiones congruent

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
3, 5, 1, 7, 2, 8, 4, 6
4, 6, 7, 1, 8, 2, 3, 5
7, 8, 4, 3, 6, 5, 1, 2

Si & x & z seorsim considerata ubique pares habeant dimensiones, tum sequentes quaternæ regiones congruent

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
2, 1, 5, 6, 3, 4, 8, 7
4, 6, 7, 1, 8, 2, 3, 5
6, 4, 8, 2, 7, 1, 5, 3.

Si variables y & z seorsim considerata ubique pares habeant CAP. I.
dimensiones,
tum sequentes quaternæ regiones congruent

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
 2, 1, 5, 6, 3, 4, 8, 7
 3, 5, 1, 7, 2, 8, 4, 6
 5, 3, 2, 8, 1, 7, 6, 4.

22. Si una variabilium ubique pares habeat dimensiones, reliquæ vero binæ simul consideratæ vel ubique pares vel ubique impares constituent dimensiones, tum quoque quaternæ regiones congruent, sequenti modo.

Si z ubique pares habeat dimensiones, & x & y ubique vel
pares vel impares dimensiones constituent,
tum sequentes quaternæ regiones congruent

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
 2, 1, 5, 6, 3, 4, 8, 7
 7, 8, 4, 3, 6, 5, 1, 2
 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.

Si y ubique pares habeat dimensiones, atque x & z ubique vel
pares vel impares dimensiones junctim constituent,
tum sequentes quaternæ regiones congruent

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
 3, 5, 1, 7, 2, 8, 4, 6
 6, 4, 8, 2, 7, 1, 5, 3
 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.

Si x ubique pares habeat dimensiones, atque y & z junctim
considerata ubique vel pares vel impares constituent dimensiones,
tum sequentes quaternæ regiones congruent

APPEND.

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8
4,	6,	7,	1,	8,	2,	3,	5
5,	3,	2,	8,	1,	7,	6,	4
8,	7,	6,	5,	4,	3,	2,	1.

His ergo tribus casibus simul omnes tres variables x , y , & z junctim consideratæ ubique vel pares vel impares dimensiones adimplebunt.

23. Superfunt sequentes casus quaternarum regionum æqualium.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si } x \text{ \& } y \\ \text{\& } y \text{ \& } z \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{ubique vel pares vel ubique impares dimensiones} \\ \text{constituant,} \\ \text{tum sequentes quaternæ regiones congruent} \end{array}$$

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8
5,	3,	2,	8,	1,	7,	6,	4
7,	8,	4,	3,	6,	5,	1,	2
6,	4,	8,	2,	7,	1,	5,	3.

Eadem ergo similitudines prodeunt, si insuper binæ reliquæ variables x & z ubique vel pares vel impares dimensiones constituent, ita ut hæc. conditio jam in proposita contineatur. Portiones ergo Superficiæ in quaternis disjunctis regionibus erunt inter se æquales, si in æquatione binæ quæque variables junctim consideratæ ubique vel pares vel impares dimensiones constituent. Cum autem tres dentur combinationes, notandum est si duæ exposita proprietate fuerint præditæ, tum simul tertiam combinationem eadem proprietate esse gavisuram.

24. Quod si ad condiciones, quæ quaternas regiones similes & æquales produxerant, nova insuper accedat in iis non contenta, quæ per se æqualitatem in binas regiones inferret, tum omnes prorsus regiones inter se fient æquales, atque Superficiæ constabit ex octo paribus inter se æqualibus & similibus.

libus. Æquatio ergo pro hujusmodi Superficiebus omnes hæctenus memoratas proprietates conjunctim possidebit: scilicet, singulæ variables x, y, z seorsim consideratæ ubique pares constituent dimensiones; ex quo jam sequitur binas quasque conjunctim consideratas, atque etiam omnes tres simul sumtas, ubique pares esse constituturas dimensiones.

25. Utrum autem æquatio inter tres variables proposita una duabusve vel adeo tribus exhibitaram proprietatum sit prædita an non, id quidem, quod ad cujusvis variabilis pares dimensiones attinet, facile perspicitur. Neque difficilius est inquirere, utrum omnes variables simul consideratæ ubique vel pares vel impares constituent dimensiones. At utrum binæ tantum ad hanc proprietatem sint comparatæ, difficilius erit examinare. Ponatur in æquatione vel $x = nz$, vel $y = nz$, vel $x = ny$, ac dispiciatur utrum uno alterove casu æquatio resultet, in qua variabilis z duobus prioribus casibus, vel y postremo casu, ubique induat pares dimensiones: quod si eveniat, duæ variables conjunctim sumtæ ubique vel pares vel impares dimensiones constituent necesse est; hincque Superficies duas saltem habebit partes inter se similes & æquales.

C A P U T I I.

De Sectionibus Superficierum a planis quibuscunque factis.

26. **Q**uemadmodum intersectiones Linearum sunt puncta, ita Superficierum intersectiones sunt Lineæ vel rectæ, vel curvæ. Intersectio duorum planorum est Linea recta, uti ex Elementis constat. Globi autem plano secti figura est Circulus. Plurimum autem ad cognitionem Superficiæ affertur subsidii, si Lineas, quibus Superficies a datis planis intersectatur, noverimus. Hoc enim modo simul infinita Su-

APPEND. —————
 perfciei puncta innotescunt, cum modo præcedente singuli variabilis unius z valores singula tantum Superficiæ puncta præbeant.

TAB. 27. Cum igitur Superficiæ ad tria plana inter se normalia
 X X XI. referamus, ante omnia investigari conveniet interfectiones Superficiæ & horum planorum. Sumto ergo primo plano APQ , quod variabilibus $AP = x$, $AQ = y$ determinatur, (quoniam tertia variabilis z designat distantiam cujusque Superficiæ puncti ab hoc plano,) perspicuum est, si ponatur $z = 0$, ea Superficiæ puncta inventum iri, quæ in ipso plano APQ sint sita, atque idcirco æquatio residua inter x & y exhibebit Lineam, qua Superficiæ a plano APQ intersecatur. Simili modo, si ponatur $y = 0$, æquatio inter x & z exprimet interfectionem Superficiæ a plano APR factam; atque, posito $x = 0$, æquatio inter y & z dabit interfectionem Superficiæ & plani AQR .

28. Supra jam innuimus Superficiem Globi Centrum in puncto A habentis, cujus radius $= a$, exprimi hac æquatione $xx + yy + zz = aa$; hoc ergo exemplo ad illustrationem harum interfectionum utar. Sit igitur $z = 0$, atque æquatio $xx + yy = aa$, exhibebit interfectionem Globi a plano APQ factam, quam ergo patet esse Circulum Centrum A & radium $= a$, habentem. Simili modo, factò $y = 0$, interfectio Globi a plano APR facta erit Circulus æquatione $xx + zz = aa$, contentus. Eodemque modo, si ponatur $x = 0$, æquatio $yy + zz = aa$, parem Circulum pro interfectione plani AQR indicat. Hæc quidem sunt satis nota, cum Sectiones Globi planis per ejus Centrum transeuntibus factæ omnes sint Circuli maximi, seu cum Globo radium communem habentes.

29. Haud difficilior erit Sectiones Superficiæ per plana alia uni istorum planorum principalium parallela factas determinare. Concipiatur planum plano APQ parallelum ab eoque distans intervallo $= b$, omnia ergo Superficiæ puncta, quorum ab eodem plano APQ distantia, quæ per variabilem z indicatur, est $= b$, simul in isto plano parallelo sita erunt, ideoque interfectionem

terfectionem formabunt. Pro hac ergo interfectione æquatio habebitur, si in æquatione pro Superficie ponatur $z = b$; tum enim habebitur æquatio inter binas Coordinatas orthogonales x & y naturam sectionis exprimens. Eodem autem modo sectiones, quæ per plana vel ipsi APR vel AQR parallela fiunt, definiuntur, unde superfluum foret, quæ de uno dicta sunt, in reliquis repetere.

30. Si ergo in æquatione pro Superficie inter tres Coordinatas x , y & z , una earum z ponitur constans $= b$, tum sectio Superficie per planum plano APQ parallelum ab eoque intervallo b distans formata oritur. Quod si ergo successive huic litteræ b omnes valores possibiles, tam affirmativi quam negativi, tribuantur, tum omnes sectiones Superficie, quæ a planis plano APQ parallelis formantur, obtinentur: atque, cum tota Superficies hujusmodi planis parallelis in partes infinitas dissecari possit, hocque modo omnes sectiones cognoscantur, ex istis omnibus sectionibus tota Superficies innotescet. Omnes scilicet istæ sectiones unica æquatione inter Coordinatas x & y , constantem indeterminatam b involvente, exprimentur; ex quo omnes istæ sectiones erunt Lineæ vel similes vel saltem affines una æquatione contentæ.

31. Omnes ergo sectiones Superficie plano APQ parallelæ erunt inter se æquales, atque a planis APR , AQR æquali modo trajicientur, si æquatio inter x & y ita fuerit comparata, ut eadem mereat quicumque valor ipsi b tribuatur. Hoc autem evenire nequit, nisi variabilis z , cujus loco b est posita, prorsus desit in æquatione pro Superficie. Quo circa, si variabilis tertia z in æquationem Superficie omnino non ingrediatur, tum omnes sectiones plano APQ parallelæ erunt inter se æquales; quarum natura exprimetur ipsa Superficie æquatione; quippe, quæ duas tantum variables x & y involvit. Simili vero modo, si in æquatione pro Superficie vel variabilis x vel y desit, tum omnes sectiones vel plano AQR vel plano APR parallelæ inter se congruent.

APPEND. 32. Hujusmodi ergo Superficies non solum animo facile concipitur, sed etiam construitur atque in data materia efformatur. Ponamus enim in æquatione deesse variabilem z , ita ut æquatio tantum sit inter Coordinatas $AP = x$ & $AQ = PM = y$; ex hac in plano APQ describatur Linea curva **BMD**. Quo factò concipiatur Linea recta infinita ad planum hoc perpetuo normalis secundum Lineam hanc curvam **BMD** circumferri; atque hæc recta motu suo producet seu efformabit Superficiem, per eam æquationem indicatam. Unde perspicuum est, si Linea **BMD** fuerit Circulus, tum Superficiem ex eo ortam fore Cylindri recti; sin autem Linea **BMD** fuerit Ellipsis, tum Superficiem Cylindri scaleni generari. Quod si Linea **BMD** non fuerit continua, sed ex pluribus rectis conflata figuram exhibens rectilineam, tum Superficies resultabit prismatica.

T A B.
XXXI.
Fig. 122.

33. Quod hoc Superficierum genus Cylindros & omnia Prismata in se complectitur, univèrsum hoc genus Superficierum appellari conveniet *cylindricum*, seu *prismaticum*; singulæ autem species sub hoc genere contentæ determinabuntur per figuram planam **BMD**, ex qua, modo ante descripto, sint ortæ: atque ista figura **BMD** *Basis* appellabitur. Quoties ergo in æquatione pro Superficie una trium variabilium x , y , z deest, tum Superficies hac æquatione contenta erit cylindrica seu prismatica. Quod si autem duæ variabiles y & x simul desint; tum ob $x = \text{Constanti}$, Linea **BMD** abibit in rectam ad Axem AD normalem, atque propterea Superficies fiet plana normalis ad planum APQ .

34. Post hoc Superficierum genus maxime notari meretur id, quod oritur ex æquatione inter tres variables x , y & z homogenea, seu in qua tres istæ variables ubique eundem dimensionum numerum constituunt, cujusmodi est $zz = mxz + xx + yy$. Hinc enim omnes sectiones, quæ fiunt per plana uni ex tribus principalibus parallela, erunt figuræ inter se similes. Namque, si tribuatur ipsi z valor constans h , manifestum est æquationem $hb = mbx + xx + yy$, si pro h succes-

sive

sive alii aliique valores tribuantur, infinitas continere figuras inter se similes; quarum Parametri sint æquales, seu proportionales ipsi b . Cum igitur hæ sectiones non solum sint similes, sed etiam crescant in ratione distantiarum a plano APQ , Lineæ, quæ ex puncto A per singularum sectionum puncta homologa ducuntur, erunt rectæ. C A P. H.

35. Proposita ergo hujusmodi æquatione inter tres variables $x, y, & z$ homogenea, tribuatur ipsi z valor datus $AR = b$; sitque TS, Mm figura in plano ipsi APQ parallelo & per punctum R ducto, quam exhibebit æquatio inter x & y , ita ut sit $RV = x$, & $VM = y$. Quod si ergo hæc sectio una TS, Mm fuerit descripta, concipiatur circa ejus Perimetrum circumduci Linea recta infinita perpetuo per punctum A transiens; atque hæc recta motu suo describet Superficiem in æquatione proposita contentam. Perspicuum vero est, si figura TS, Mm fuerit Circulus Centrum in R habens, tum prodire Conum rectum; sin R non sit Centrum, Conum scalenum: at, si illa figura fuerit rectilinea, orientur cujusque generis Pyramides. Quam ob rem Superficies, quæ in hoc æquationum generum continentur, hic *conicas* seu *pyramidales* vocabimus. T A B.
X X X I.
Fig. 123.

36. Ex his manifestum est, si æquatio inter tres variables x, y & z fuerit homogenea, atque adeo Superficies conica seu pyramidalis; tum non solum omnes sectiones uni plano principali APQ parallelas inter se esse figuras similes, quarum Parametri sint distantii sectionum a vertice A proportionales; sed, ob eandem rationem, intelligitur quoque, omnes sectiones, quæ sint vel plano APR vel plano AQR parallelæ, eadem illa proprietate esse præditas, ut sint figuræ inter se similes, quarum latera homologa teneant distantiarum ab A rationem. Infra vero ostendetur, omnes omnino sectiones hujusmodi Corporum, quæ sunt inter se parallelæ, seu quæ sunt parallelæ plano cuicumque per Verticem A ducto, inter se quoque fore similes, earumque Parametros distantii a vertice A esse proportionales.

APPEND.

37. Latius patet genus Superficiærum, ad quod nunc sum progressurus. Sit Z Functio quæcunque ipsius z ; ac proponatur æquatio quæcunque homogenea inter tres variables x , y , & Z . Fiat $Z = H$, posita $z = b$: &, cum hoc casu prodeat æquatio homogenea inter x , y & H , erunt omnes sectiones, plano APQ parallelæ, figuræ inter se similes; quarum Parametri autem non distantis b , sed earum Functionibus H erunt proportionales. Ex quo Lineæ per harum sectionum puncta homologa ductæ non erunt Lineæ rectæ, sed Curvæ a Functionis Z ratione pendentes. Tum vero etiam hinc non sequitur, sectiones, quæ alio cuiquam plano sint parallelæ, fore inter se similes.

38. In hoc genere ambo præcedentia continentur. Si enim fuerit $Z = z$, seu $Z = az$, ob æquationem inter x , y & z homogeneam, orientur Superficies conicæ. Idem evenit, si fuerit $Z = \alpha + \beta z$; hoc tantum discrimine, quod Vertex Coni non in ipsam punctum A cadat; scilicet, si fuerit $Z = \frac{b-z}{b}$, Vertex Coni ab A distabit intervallo b . Quod si jam statuatur $b = \infty$, figura conica abibit in cylindricam, fietque $Z = 1$. Hinc æquatio pro Superficiebus cylindricis ita erit comparata, ut in ea variables x & y una cum constanti 1 ubique eundem dimensionum numerum adimpleant. Quomocunque autem æquatio inter x & y fuerit comparata, si tertia variabilis z in eam non ingrediatur, semper per unitatem homogeneitas impleri potest: unde, uti supra jam ostendimus; omnis æquatio una variabili carens exprimit Superficiem cylindricam.

39. Inter hæc Corpora, in quibus omnes sectiones, uni plano principali APQ parallelæ, sunt figuræ similes, maxime notatu sunt digna ea, quorum istæ sectiones sunt Circuli Centra in eadem recta AR ad planum APQ normali habentes. Hujusmodi Corpora torno efformantur, indeque *tornata* appellantur. Pro hujusmodi ergo Corporibus æquatio generalis erit $ZZ = xx + yy$: quicunque enim valor variabili z tribuat

tur, ut fiat $Z = H$, prodibit pro sectione plano APQ parallela æquatio $HH = xx + yy$, quæ est pro Circulo radi- CAP. II.
um $= H$ & Centrum in recta AR habente. Si fuerit $ZZ = zz$, habebitur Conus rectus: sin $ZZ = aa$, Cylin-
drus; &, si $ZZ = aa - zz$ prodibit Globus, quæ sunt spe-
cies præcipuæ Corporum tornatorum.

40. Contemplemur ejusmodi Corpora, quorum omnes se- TAB.
ctiones PTV normales ad Axem AP sint Triangula, horum- XXXII.
que Apices T in Linea recta DT Axi AP parallela sitæ. Fig. 124.
Sit AVB Basis hujus Corporis, seu ejus sectio in plano APQ
facta, quæ sit Curva quæcunque. Sit distantia rectæ DT ab
Axe AB , nempe AD , $= c$: positisque, ut hæcenus, tribus
variabilibus $AP = x$, $PQ = y$, $QM = z$; erit PV Fun-
ctio quæpiam ipsius x : sit ea $PV = P$: erit, ob triangula
 VQM , VPT similia, $P : c = P - y : z$; seu $z = c -$
 $\frac{c y}{P}$. Pro hujusmodi ergo Corporibus æquabitur $\frac{c - z}{y}$ Fun-

ctioni cuiuspiam ipsius x . Differunt igitur hæc Corpora a co-
nicis, quod desinant in aciem rectam DT , cum conica de-
sinant in cuspidem. Si Basis AVB ponatur Circulus, Cor-
pus resultans a WALLISIO fufius est pertractatum, atque *Co-*
no-cuneus appellatum.

41. Sint, ut modo, omnes sectiones Axi AB normales TAB.
 PTV triangula ad P rectangula, quorum Vertice autem T XXXIII.
constituant Curvam quæcunque AT : Basis autem sit figura Fig. 125.
 AVB . Positis tribus variabilibus $AP = x$, $PQ = y$, &
 $QM = z$; erit in Curva AVB , recta PV Functio quædam
ipsius x quæ sit $= P$: tum vero erit PT quoque Functio ip-
sius x , quæ sit $= Q$; quibus positis erit

$$P : Q = P - y : z;$$

ideoque $z = Q - \frac{Qy}{P}$, seu $Pz + Qy = PQ$, vel $\frac{z}{Q} +$
 $\frac{y}{P} = 1$, vel constanti. Quod si ergo in æquatione ambæ

variabi-

APPEND. variables y & z una plures dimensiones nusquam constituent, tum Corpus ad hoc genus pertinebit, quod hic descripsimus.

T A B.
X X X I I.
Fig. 126.

42. Quoniam jam sumus contemplati ea Corpora, quorum omnes sectiones, uni plano principali parallelæ, sunt inter se similes: nunc ea consideremus, in quibus omnes istiusmodi sectiones sint figuræ inter se saltem affines; seu, quæ, sumtis Abscissis homologis, habeant Applicatas inter se proportionales. Sint igitur hujusmodi Corporis tres sectiones principales ABC , ACD , & ABD , quarum isti ACD omnes sectiones parallelæ debeant esse figuræ affines. Quare in ea ponatur Basis $AC = a$, & altitudo $AD = b$; sumtisque Coordinatis $Aq = p$, & $qm = q$, sit q Functio quæcunque ipsius p . Concipiatur nunc sectio quæcunque parallela PTV , posito intervallo $AP = x$; eritque Basis $PV =$ Functioni ipsius x , quæ sit $= P$, & altitudo $PT =$ Functioni ipsius x , quæ sit $= Q$. Vocetur jam $PQ = y$ & $QM = z$; atque, ex affinitatis natura, erit $a : p = P : y$ & $b : q = Q : z$; seu $y = \frac{Pp}{a}$, & $z = \frac{Qq}{b}$.

43. Quod si ergo datæ fuerint omnes tres sectiones principales Corporis, ABC , ACD , & ABD ; hinc natura ipsius Corporis determinabitur, quod habeat omnes sectiones, ipsi ACD parallelas, simul eidem affines. Primum enim dantur P & Q Functiones ipsius x ; tum vero est q Functio ipsius p ; unde, ex binis variabilibus x & p , definiuntur ambæ variabiles y & z . Verum, si æquationem inter tres Coordinatas x , y & z desideremus; quoniam q est Functio ipsius p ; seu, quia datur æquatio inter p & q , in hac æquatione substituitur $p = \frac{ay}{P}$, & $q = \frac{bz}{Q}$; sicque, ob P & Q Functiones ipsius x , orietur æquatio inter tres Coordinatas x , y & z , qua natura Corporum ad hoc genus pertinentium exprimitur. Patet autem, posito $x = 0$, fieri oportere $P = a$ & $Q = b$.

44. Si in æquatione pro Superficie duæ variabiles y & z CAP II.
ubique eundem dimensionum numerum constituent, tum omnes sectiones ad Axem AP normales erunt figuræ rectilinéæ. Posito enim pro x valore quocunque constante, prodibit æquatio inter y & z homogenca, quæ unam pluresve Lineas rectas indicat. Cum igitur numerus dimensionum, qui a binis y & z constituitur, ubique sit idem, vel par erit vel impar; & hanc ob rem, uti supra §. 20. ostensum est, hujusmodi Corpora binas habebunt partes inter se æquales. Scilicet portiones in regionibus prima & quinta inter se erunt similes, tum vero etiam in regione secunda & tertia, & ita de ceteris, uti Tabella loco citato indicat.

45. Jam plures hic contemplati sumus Corporum species, TAB. in quibus dantur infinitæ sectiones rectilinéæ; veluti hanc ultimo pertractatam, & cylindricas atque conicas. Hæ vero XXXII.
Fig. 127. ita sunt comparatæ ut sectiones per Axem AP factæ sint rectilinéæ; hoc autem genus latius patet. Sit enim $AKMP$, sectio Corporis per Axem AP facta, ad angulum $MPV =$

ϕ ; positis $AP = x$, $PQ = y$, & $QM = z$, erit $\frac{z}{y}$ Tan-

gens anguli ϕ ; & recta $PM = \frac{z}{\sin. \phi}$. Quod si jam Linea

KM sit recta, debebit esse $\frac{z}{\sin. \phi} = ax + \beta$; ubi a & β e-

runt constantes ab angulo ϕ pendentes: ideoque erunt Functiones nullius dimensionis ipsarum y & z . Sint R & S hujusmodi Functiones: eritque $x = Rz + S$; seu $x = Ry + S$. Vel, denotante T Functionem unius dimensionis, & S nullius dimensionis ipsarum y & z , omnia hujusmodi Corpora continebuntur in hac æquatione generali $x = T + S$.

46. Quæcunque autem fuerit proposita Superficies, cujus natura per æquationem inter tres variabiles x , y , & z definiatur, facile erit ejus sectionem quamvis secundum Axem AP factam determinare. Sit enim angulus MPV , quo ista

Euleri *Introduct. in Anal. infin. Tom. II.* X x sectio

APPEND. sectio $AKMP$ ad planum $ACVP$ inclinatur, $= \Phi$; & ponatur recta $PM = v$, quæ erit Applicata sectionis quæsitæ; quo facto habebitur $QM = z = v \sin. \Phi$, & $PQ = y = v \cos. \Phi$. Quod si ergo in æquatione pro Superficie loco variabilium y & z isti valores $v \cos. \Phi$ & $v \sin. \Phi$ substituuntur, oriatur æquatio inter duas variabiles x & v , qua natura sectionis $AKMP$

TAB. exprimitur. Simili vero modo omnes quoque sectiones, quæ
 XXXI. fiunt secundum alterutrum binorum reliquorum Axium principalium AQ vel AR , inveniuntur. Tres enim isti Axes AP ,
 Fig. 121. AQ & AR , a quibus tres variabiles x , y & z pendent, ita inter se sunt permutabiles, ut perpetuo, quicquid de eorum uno docetur, ad binos reliquos transferatur.

47. Sicut ergo plano APQ pro norma, ad quod omnes sectiones Superficiæ referantur; sectio quæcunque plano facta vel erit parallela huic plano, vel ad id erit inclinata; hocque casu planum sectionis continuatum alicubi interfecabit planum APQ , atque intersectio istorum planorum erit Linea recta. Priori quidem casu, quo planum sectionis parallelum est plano APQ , natura sectionis innotescet tribuendo quantitati z valorem constantem. Posteriori vero casu, quo planum sectionis ad planum APQ inclinatur, naturam sectionis adhuc tantum definire licet, si vel recta AP vel recta AQ fuerit intersectio plani secantis cum plano APQ . Ad omnes ergo omnino sectiones eruendas superest, ut quascunque alias binorum illorum planorum intersectiones contemplemur.

TAB. 48. Sit recta ES , Axi AP parallela, intersectio plani secantis cum plano APQ ; angulusque inclinationis QSM ,
 XXXIII. quo planum secans ESM ad planum APQ inclinatur, ponatur $= \phi$, & distantia AE vocetur $= f$. Cum jam sit
 Fig. 128. $AP = x$, $PQ = y$ & $QM = z$; erit $ES = x$, & $QS = y + f$. Quod si ergo sectio ad rectam ES tanquam Axem referatur, erit Abscissa $ES = x$, Applicata vero SM ponatur $= v$; unde, ob angulum $QSM = \phi$, obtinebitur $QM = z = v \sin. \phi$, & $SQ = y + f = v \cos. \phi$, hincque $y = v \cos. \phi - f$. Quare, si in æquatione pro Superficie inter

inter $x, y, & z$, substituatur $y = v.\text{cof.}\phi - f$ & $z = v.\text{sin.}\phi$, oriatur æquatio inter Coordinatas x & v sectionis ESM quæsitæ. Si intersectio ES esset normalis ad Axem AP ; tum, quia foret parallela alteri Axi principali in plano APQ existenti, permutandis variabilibus x & y , sectio eodem modo inveniatur.

49. Habeat jam intersectio ES in plano APQ positionem quancunque; cui recta AE , ad Axem AP normalis, occurrat in puncto E . Tum ducatur ETX Axi AP parallela, & ponatur $AE = f$, & angulus $TES = \theta$. Sumtis porro tribus variabilibus $AP = x, PQ = y$ & $QM = z$; ex Q ad ES ducatur normalis QS , & jungatur, recta MS , erit angulus QSM inclinatio plani secantis ad planum APQ , qui ponatur $= \phi$. Deinde vero sint sectionis quæsitæ Coordinatæ $ES = t$ & $SM = v$. Ex S ad EX & QP productam ducantur perpendiculara ST & SV ; eritque $QM = z = v.\text{sin.}\phi$; $QS = v.\text{cof.}\phi$; $SV = v.\text{cof.}\phi.\text{sin.}\theta$, & $QV = v.\text{cof.}\phi.\text{cof.}\theta$. Postea vero, erit $ST = VX = t.\text{sin.}\theta$, & $ET = t.\text{cof.}\theta$. Ex his colligitur tandem $AP = x = t.\text{cof.}\theta + v.\text{cof.}\phi.\text{sin.}\theta$, & $PQ = y = v.\text{cof.}\phi.\text{cof.}\theta - t.\text{sin.}\theta - f$; qui valores, si loco x, y & z substituuntur, dabunt æquationem pro sectione quæsitæ.

TAB.

XXXIII.

Fig. 129.

50. Data ergo æquatione pro Solido quocunque, ex ea facile elici potest æquatio pro Sectione ejus quacunque plana. Ac primo quidem perspicuum est, si æquatio pro Solido inter tres Coordinatas x, y & z , fuerit algebraïca, tum quoque omnes ejus sectiones fore Curvas algebraïcas. Deinde vero, cum æquatio inter Coordinatas sectionis t & v oriatur, ponendo in æquatione pro Solido $z = v.\text{sin.}\phi, x = t.\text{cof.}\theta + v.\text{cof.}\phi.\text{sin.}\theta$, & $y = v.\text{cof.}\phi.\text{cof.}\theta - t.\text{sin.}\theta - f$, manifestum est in æquatione pro quavis sectione Coordinatas t & v plures dimensiones obtinere non posse, quam in æquatione pro Solido tres Coordinatæ x, y & z constituent. Fieri tamen quandoque potest ut æquatio pro sectione ad ordinem

APPEND. inferiorem referatur; supremis scilicet membris, post substitutionem, se se tollentibus.

51. Si igitur in æquatione pro Superficie tres variables x , y & z unicam tantum constituent dimensionem, ita ut æquatio sit hujusmodi $\alpha x + \beta y + \gamma z = a$; tum omnes hujus Superficiæ sectiones erunt Lineæ rectæ. Erit autem hoc casu Superficiæ plana; uti, cum attendenti facile patebit, tum infra clarius ostendetur: atqui ex Elementis notum est sectionem duorum planorum Lineam rectam esse oportere. Simili modo hinc intelligitur omnium Solidorum, quorum natura hac generali æquatione contineatur

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + \delta xy + \epsilon xz + \zeta yz + ax + by + cz + ee = 0;$$

singulas sectiones, nisi sint Lineæ rectæ, Lineas secundi ordinis esse debere, neque ullam dari sectionem, cujus natura per æquationem secundi gradus exprimi nequeat.

C A P U T III.

De sectionibus Cylindri, Coni & Globi.

52. **Q**Uoniam hæc Corpora in Elementis Stereometriæ considerari solent, eorum sectiones hic antea investigari conveniet, quam ad Solida alia minus nota progrediamur. Primum igitur, Cylindrorum duæ occurrunt species in Elementis, *rectorum* scilicet ac *scalenorum*. Cylindrus *rectus* vocatur, cujus omnes sectiones ad Axem normales sint Circuli inter se æquales, atque Centra in eadem Linea recta disposita habentes. Cylindrus autem *scalenus* sectiones ad Axem, non normales sed sub dato angulo inclinatas, habet circulares; quæ affectio commodius ita exprimetur, ut dicamus Cylindrum obliquum seu scalenum esse cujus omnes sectiones ad

ad Axem normales sint Ellipses æquales, quarum Centra in eadem Linea recta, quæ Axis Cylindri vocatur, sint posita. CAP. III.

53. Sit igitur Cylindrus, sive rectus sive scalenus, cujus Axis CD perpendiculariter insistat plano tabulæ; sitque ejus Basis $AEBF$, seu sectio a plano tabulæ formata, vel Circulus vel Ellipsis. Assumam vero hanc Basim esse Ellipsin quamcunque, Centrum in C & Axes conjugatos AB & EF habentem; quoniam, quæ de Cylindro scaleno tradentur, facillime ad rectum accommodabuntur. Ponatur ergo alter semiaxis $AC = BC = a$, alter vero $CE = CF = c$; positus nunc tribus Coordinatis $CP = x$, $PQ = y$ & $QM = z$; erit, ex natura Ellipsis, $aacc = ayy + cxx$; quæ eadem æquatio exprimet naturam Cylindri, cum tertia variabilis z , ob omnes sectiones plano CPQ parallelas inter se æquales, in æquationem non ingrediatur.

T A B.
XXXIII.
Fig. 130.

54. Hujus ergo Cylindri omnes sectiones Basi parallelæ eidem erunt similes & æquales. Scilicet Circuli in Cylindro recto & Ellipses in scaleno. Tum vero sectiones, quæ fiunt secundum plana ad APQ normalia, erunt Lineæ rectæ, binæ inter se parallelæ, quæ, ubi Cylindrus tangetur a plano, in unum coalescent; atque adeo imaginariæ evadunt, si planum Cylindro prorsus non occurrat. Hoc ipsum ex æquatione sponte sequitur; si enim vel x vel y vel $x \pm ay$ ponatur constans ad denotandam intersectionem plani secantis & Basim, tum æquatio duas habebit radices simplices. Sicque determinavimus jam sectiones omnes, quæ fiunt per plana, uni trium planorum principalium parallela.

55. Ad naturam reliquarum sectionum indagandam, ponamus planum secans cum plano Basim intersectionem constituere rectam Lineam GT , quæ primo sit parallela alteri Axi conjugato EF , seu ad alterum AB productum in G normalis. Hoc posito, sit distantia $CG = f$, & inclinatio plani secantis GTM ad Basim mensuretur angulo $= \phi$. Occurrat planum secans GTM Axi Cylindri in D ; &, ducta recta DG , erit

$$X x \quad 3 \quad DGC$$

APPEND. $DGC = \phi$, ac propterea $DG = \frac{f}{\cos \phi}$ & $CD = \frac{f \sin \phi}{\cos \phi}$. Ex sectionis quæsitæ puncto quovis M ducatur MT parallela ipsi DG : atque, ob $TQ = f - x$, & angulum $QTM = \phi$, erit $TM = \frac{f - x}{\cos \phi}$ & $QM = \frac{(f - x) \sin \phi}{\cos \phi} = z$. Ducatur MS parallela ipsi TG , ideoque normalis in DG , erit $MS = TG = PQ = y$, & $DS = \frac{x}{\cos \phi}$.

56. Sumantur nunc rectæ DS & SM pro Coordinatis sectionis quæsitæ; sitque $DS = t$, & $SM = u$. Hinc erit $y = u$, $x = t \cos \phi$: & ob $z = \frac{(f - x) \sin \phi}{\cos \phi}$, erit $z = f \tan \phi - t \sin \phi$. Substituantur isti valores in æquatione pro Cylindro $aacc = aayy + ccxx$, atque resultabit pro sectione quæsitâ ista æquatio $aacc = aauu + cctt (\cos \phi)^2$: quæ indicat sectionem fore Ellipsin Centrum in puncto D habentem, cujus alter Axis principalis in rectam DG cadat, alter vero ad hunc sit normalis. Erit vero semiaxis in rectam DG cadens (facto $u = 0$) $= \frac{a}{\cos \phi}$. Vel, ducatur recta BH parallela ipsi GD , erit $BH = \frac{a}{\cos \phi}$ alter semiaxis sectionis quæsitæ, alter vero conjugatus erit $= c = CE$.

57. Erit ergo sectio Cylindri hoc modo orta Ellipsis, cujus semiaxes conjugati erunt $\frac{a}{\cos \phi}$ & c . Quod si ergo in Basi $AEBF$ fuerit $AC = a$ semiaxis major; tum, ob $\frac{a}{\cos \phi}$ majorem quam a , sectiones erunt Ellipses magis oblongæ, quam Basis. Sin autem fuerit c minor quam a : seu, si intersectio GT fuerit Axi majori Basis parallela, tum fieri potest ut in sectione ambo Axes fiant inter se æquales, atque adeo sectio Circulus evadat. Eveniet hoc si fuerit $\frac{a}{\cos \phi} = c$, seu $\cos \phi =$

$$\frac{a}{c}$$

$\frac{a}{c}$. Cum igitur sit in Triangulo BCH ad C rectangulo an- CAP. III.

gulus $CBH = \phi$, erit $\text{cos. } \phi = \frac{BC}{BH} = \frac{a}{BH}$. Quare, si sumatur $BH = CE$, sectiones erunt Circuli, quod cum duplici modo fieri queat, rectam $BH = CE$ sive supra sive infra constituendo, binæ existent sectionum circularium series, quæ ad Axem CD oblique erunt inclinatæ; ex quo hujusmodi Cylindri scaleni appellantur.

TAB.
XXXIV.
Fig. 131.

58. Sit nunc recta GT , utcumque oblique posita, intersectio plani secantis cum Basi, ad quam ex Centro Basis C demittatur perpendicularum $GC = f$; & ponatur angulus $BCG = \theta$; sitque angulus inclinationis $CGD = \phi$, cui æqualis erit angulus QTM , ducta QT ad GT normali. Erit ergo $DG = \frac{f}{\text{cos. } \phi}$, & $CD = \frac{f \cdot \text{sin. } \phi}{\text{cos. } \phi}$. Sit M punctum in sectione quæ sita, unde ad Basin perpendicularum MQ hincque porro ad Axem QP demittatur; ita ut, vocatis $CP = x$, $PQ = y$ & $QM = z$, sit $aacc = aayy + ccxx$. Ducantur porro ad intersectionem GT normales PV , QT ; erit $GV = x \cdot \text{sin. } \theta$, $PV = f - x \cdot \text{cos. } \theta$; & ob angulum $QPW = \theta$, fiet $QW = y \cdot \text{sin. } \theta$, $PW = VT = y \cdot \text{cos. } \theta$, & $QT = f - x \cdot \text{cos. } \theta + y \cdot \text{sin. } \theta$. Denique, ducta MT , ob angulum $MTQ = \phi$, erit $TM = \frac{z}{\text{sin. } \phi}$ & $QT = \frac{z \cdot \text{cos. } \phi}{\text{sin. } \phi}$.

59. Compleatur parallelogrammum rectangulum $GSMT$; & vocetur $DS = t$, $SM = GT = u$: eritque $u = GV + VT = x \cdot \text{sin. } \theta + y \cdot \text{cos. } \theta$. At, ob $QT = f - x \cdot \text{cos. } \theta + y \cdot \text{sin. } \theta$, erit $QT - CG = y \cdot \text{sin. } \theta - x \cdot \text{cos. } \theta$, ex quo fit $DS = TM - DG = \frac{y \cdot \text{sin. } \theta - x \cdot \text{cos. } \theta}{\text{cos. } \phi} = t$. Cum igitur sit $x \cdot \text{sin. } \theta + y \cdot \text{cos. } \theta = u$, & $y \cdot \text{sin. } \theta - x \cdot \text{cos. } \theta = t \cdot \text{cos. } \phi$, habebitur $y = u \cdot \text{cos. } \theta + t \cdot \text{sin. } \theta \cdot \text{cos. } \phi$, & $x = u \cdot \text{sin. } \theta - t \cdot \text{cos. } \theta \cdot \text{cos. } \phi$. Qui valores in æquatione $aacc = aayy + ccxx$ loco x & y substituti dabunt

$$aacc =$$

APPEND. $aacc = \frac{aaau(\cos.\theta)^2 + 2aaut.\sin.\theta.\cos.\theta.\cos.\Phi + aatt(\sin.\theta)^2(\cos.\Phi)^2}{ccuu(\sin.\theta)^2 - 2cut.\sin.\theta.\cos.\theta.\cos.\Phi + cctt(\cos.\theta)^2(\cos.\Phi)^2}$

quam æquationem patet esse ad Ellipsin, cujus Centrum sit in *D*, at Coordinatæ *DS* & *SM* ad Axes principales non sint normales, nisi sit $a=c$ seu Cylindrus rectus.

TAB.
XXXIV.
Fig. 132.

60. Ad hanc sectionem proprius cognoscendam, sit *aMebf* Curva, cujus æquatio est inventa inter Coordinatas $DS = t$ & $MS = u$; sitque, brevitatis ergo ista æquatio $aacc = \alpha uu + 2\beta tu + \gamma tt$; ita, ut pro casu præsentem, habeatur

$$\alpha = \frac{aa(\cos.\theta)^2 + cc(\sin.\theta)^2}{\&}$$

$$\beta = \frac{(aa - cc).\sin.\theta.\cos.\theta.\cos.\Phi}{\text{atque}}$$

$$\gamma = aa(\sin.\theta)^2(\cos.\Phi)^2 + cc(\cos.\theta)^2(\cos.\Phi)^2.$$

Sint hujus sectionis *ab* & *ef* Axes principales conjugati, ductaque ad eorum alterutrum Applicata *Mp*, vocetur $Dp = p$ & $Mp = q$; ac ponatur angulus $aDH = \zeta$; erit $u = p.\sin.\zeta + q.\cos.\zeta$ & $t = p.\cos.\zeta - q.\sin.\zeta$, quibus valoribus substitutis, fiet

$$aacc = \frac{\begin{matrix} + \alpha(\sin.\zeta)^2 & + 2\alpha.\sin.\zeta.\cos.\zeta & + \alpha(\cos.\zeta)^2 \\ + 2\mathcal{C}.\sin.\zeta.\cos.\zeta & pp & + 2\mathcal{C}.\cos.\zeta^2 & pq & - 2\mathcal{C}.\sin.\zeta.\cos.\zeta & qq \\ + \gamma.\cos.\zeta^2 & & - 2\gamma.\sin.\zeta.\cos.\zeta & & + \gamma.\sin.\zeta^2 \end{matrix}}$$

61. Hæc jam æquatio cum referatur ad Diametrum orthogonalem, coëfficiens ipsius *pq* debet esse = 0: unde, ob $2.\sin.\zeta.\cos.\zeta = \sin.2\zeta$, & $(\cos.\zeta)^2 - (\sin.\zeta)^2 = \cos.2\zeta$, fiet $(\alpha - \gamma).\sin.2\zeta + 2\beta.\cos.2\zeta = 0$: ideoque $\text{tang.} 2\zeta = \frac{2\mathcal{C}}{\gamma - \alpha}$: unde angulus *aDH*, ac proinde positio Diametrorum principalium cognoscitur. Hinc porro ipsi semiaxes definiuntur, hoc modo

$aD =$

$$aD = \frac{ac}{\sqrt{(\alpha(\sin.\zeta)^2 + 2\epsilon\sin.\zeta.\cos.\zeta + \gamma(\cos.\zeta)^2)}} \quad \&$$

$$eD = \frac{ac}{\sqrt{(\alpha(\cos.\zeta)^2 - 2\epsilon\sin.\zeta.\cos.\zeta + \gamma(\sin.\zeta)^2)}}.$$

62. Quia est $2\beta = \frac{2(\gamma - \alpha) \cdot \sin.\zeta \cdot \cos.\zeta}{\cos.\zeta^2 - \sin.\zeta^2}$, erit, valore hoc

in expressionibus inventis substituto,

$$aD = \frac{ac\sqrt{(\cos.\zeta^2 - \sin.\zeta^2)}}{\sqrt{(\gamma \cdot \cos.\zeta^2 - \alpha \cdot \sin.\zeta^2)}} = \frac{ac\sqrt{2 \cdot \cos.2\zeta}}{\sqrt{((\alpha + \gamma) \cdot \cos.2\zeta - \alpha + \gamma)}} \quad \&$$

$$eD = \frac{ac\sqrt{(\cos.\zeta^2 - \sin.\zeta^2)}}{\sqrt{(\alpha \cdot \cos.\zeta^2 - \gamma \cdot \sin.\zeta^2)}} = \frac{ac\sqrt{2 \cdot \cos.2\zeta}}{\sqrt{((\alpha + \gamma) \cdot \cos.2\zeta + \alpha - \gamma)}}.$$

Horum ergo semiaxium productum erit

$$aD \cdot eD = \frac{2aacc \cdot \cos.2\zeta}{\sqrt{(2\alpha\gamma(1 + (\cos.2\zeta)^2) - \alpha\alpha + \gamma\gamma)(\sin.2\zeta)^2}}$$

At, cum fit

$$(\gamma - \alpha) \cdot \sin.2\zeta = 2\epsilon \cdot \cos.2\zeta$$

erit

$$(\alpha\alpha + \gamma\gamma)(\sin.2\zeta)^2 = 4\epsilon\epsilon(\cos.2\zeta)^2 + 2\alpha\gamma(\sin.2\zeta)^2$$

ideoque

$$aD \cdot eD = \frac{2aacc \cdot \cos.2\zeta}{\sqrt{(4\alpha\gamma(\cos.2\zeta)^2 - 4\epsilon\epsilon(\cos.2\zeta)^2)}} = \frac{aacc}{\sqrt{(\alpha\gamma - \epsilon\epsilon)}} = \frac{ac}{\cos.\Phi}.$$

63. Simili modo, cum sint quadrata

$$aD^2 = \frac{2aacc \cdot \cos.2\zeta}{(\alpha + \gamma) \cdot \cos.2\zeta - \alpha + \gamma} \quad \&$$

$$eD^2 = \frac{2aacc \cdot \cos.2\zeta}{(\alpha + \gamma) \cdot \cos.2\zeta + \alpha - \gamma} \quad \text{crit}$$

$$aD^2 + eD^2 = \frac{4aacc \cdot (\alpha + \gamma)(\cos.2\zeta)^2}{4\alpha\gamma(\cos.2\zeta)^2 - 4\epsilon\epsilon(\cos.2\zeta)^2} = \frac{(\alpha + \gamma)aacc}{\alpha\gamma - \epsilon\epsilon}.$$

Hincque elicitur

Euleri *Introduct. in Anal. infin. Tom. II.*

Y y

aD +

$$\text{APPEND. } aD + eD = \frac{ac\sqrt{(\alpha + \gamma + 2\sqrt{\alpha\gamma - \epsilon\epsilon})}}{\sqrt{\alpha\gamma - \epsilon\epsilon}}$$

$$\& \\ aD - eD = \frac{ac\sqrt{(\alpha + \gamma - 2\sqrt{\alpha\gamma - \epsilon\epsilon})}}{\sqrt{\alpha\gamma - \epsilon\epsilon}}$$

Semiaxes ergo aD & eD erunt radices hujus æquationis

$$(\alpha\gamma - \epsilon\epsilon)x^4 - (\alpha + \gamma)acx^2 + a^2c^2 = 0,$$

at est

$$\sqrt{\alpha\gamma - \epsilon\epsilon} = ac \cdot \text{cos. } \Phi.$$

64. Cum sit $aD \cdot eD = \frac{ac}{\text{cos. } \Phi}$, atque Φ sit angulus quem planum secans cum plano basis constituit, hinc sequens elegans Theorema consequimur.

T H E O R E M A.

„Si Cylindrus quicumque secetur plano quocunque, erit rectangulum Axium sectionis ad rectangulum Axium Basis Cylindri, uti secans anguli, quem planum sectionis cum plano Basis constituit, ad sinum totum”.

Quare, cum omnia parallelogramma circa Diametros conjugatas descripta æqualia sint rectangulis ex Axibus formati, etiam parallelogramma ista circa Basin & sectionem quamcunque Cylindri formata eandem inter se tenebunt rationem.

T A B.
X X X V.
Fig. 133.

65. Natura autem hujusmodi sectionum obliquarum Cylindri commodius sequenti modo definiri poterit. Si fuerit Basis Cylindri Ellipsis $AEBF$, cujus semiaxes $AC = BC = a$, $EC = CF = c$, atque recta CD ad Centrum Basis C perpendicularis Axis Cylindri: secetur iste Cylindrus plano, cujus cum plano Basis intersectio sit recta TH ad Axem AB productum utcunque oblique posita, ad quam ex C perpendicularum demittatur CH , sitque angulus $GCH = \theta$. Transeat planum secans per Axis Cylindri punctum D ; erit, ducta DH , angulus CHD inclinatio plani secantis ad planum Basis, qui angulus vocetur $= \phi$. Posita ergo $CG = f$, erit $GH =$

$$GH = f \cdot \sin. \theta; CH = f \cdot \cos. \theta; DH = \frac{f \cdot \cos. \theta}{\cos. \Phi}, \text{ \& } CD = \frac{f \cdot \cos. \theta \cdot \sin. \Phi}{\cos. \Phi}.$$

Hinc, ob triangulum DCG ad C rectangulum,

$$\text{erit } DG = \frac{f \cdot \sqrt{(1 + \sin. \theta^2 \cdot \sin. \Phi^2)}}{\cos. \Phi}, \text{ \& } \text{anguli } DGH \text{ sinus} =$$

$$\frac{\cos. \theta}{\sqrt{(1 + \sin. \theta^2 \cdot \sin. \Phi^2)}}, \text{ \& } \text{cosinus} = \frac{\sin. \theta \cdot \cos. \Phi}{\sqrt{(1 + \sin. \theta^2 \cdot \sin. \Phi^2)}} \text{ \& } \text{tan}$$

$$\text{gens} = \frac{\cos. \theta}{\sin. \theta \cdot \cos. \Phi}.$$

66. Jam, ex sectionis quæsitæ puncto quovis M in Basin demittatur perpendicularis MQ ; ductaque Applicata QP , sit $CP = x$, $PQ = y$, erit $aacc = aayy + ccxx$. Ducatur QT ipsi CG parallela, in eamque ex G normalis GR ; erit $GR = y$, & $QR = f - x$. Quoniam igitur angulus $TGR =$

$$GCH = \theta, \text{ erit } GT = \frac{y}{\cos. \theta} \text{ \& } TR = \frac{y \cdot \sin. \theta}{\cos. \theta}; \text{ unde fit}$$

$$QT = f - x + \frac{y \cdot \sin. \theta}{\cos. \theta}. \text{ Ideoque, ob triangula } CDG \text{ \& } QMT$$

similia, erit $CG : DG = QT : TM$, & $CG : CG - QT = DG : DS$, ducta MS parallela GT . Hinc erit $DS =$

$$\frac{(x \cdot \cos. \theta - y \cdot \sin. \theta) \sqrt{(1 + \sin. \theta^2 \cdot \sin. \Phi^2)}}{\cos. \theta \cdot \cos. \Phi}. \text{ Pofitis ergo } DS = t, MS = u,$$

$$\text{erit } x \cdot \cos. \theta - y \cdot \sin. \theta = \frac{t \cdot \cos. \theta \cdot \cos. \Phi}{\sqrt{(1 + \sin. \theta^2 \cdot \sin. \Phi^2)}}; y = u \cdot \cos. \theta;$$

unde æquatio inter t & u reperietur, quæ adhuc erit satis complicata.

67. Quod si autem, loco Axium principalium Basis, ducatur Diameter EF interfectioni TH parallela, ad eamque Diameter conjugata AB , quæ producta ipsi TH occurrat in G . Tum vero mancant eadem, quæ ante posuimus $CG = f$; $GCH = \theta$; $CHD = \phi$, $CA = CB = m$, $CE = CF = n$; fueritque ducta QP Diametro EF parallela, & pofitis $CP = x$, $PQ = y$, ut sit $m^2 n^2 = m^2 y^2 + n^2 x^2$, erit $GT = MS = y$;

$$\text{\& } DS = \frac{DG \cdot x}{CG} = \frac{x \sqrt{(1 + \sin. \theta^2 \cdot \sin. \Phi^2)}}{\cos. \Phi}. \text{ Quare, pofitis } DS = t$$

APPEND. & $MS = u$, fiet $x = \frac{t \cdot \text{cof. } \Phi}{\sqrt{(1 + \sin. \theta^2 \cdot \sin. \Phi^2)}}$ & $y = u$, erit vero

$\frac{CG}{D.G}$ cofinus anguli CGD ; unde, si ponatur angulus $CGD = \eta$, erit $x = t \cdot \text{cof. } \eta$; ideoque pro sectione quaesita erit $mmn = m m u u + n n t t \cdot \text{cof. } \eta^2$, ad Diametros conjugatas, Centro existente in D ; eritque semidiameter in directione $DS = \frac{m}{\text{cof. } \eta}$ & alter $= n$. Anguli vero, quo haec Diametri invicem inclinantur $GS M$, tangens erit $= \frac{\text{cof. } \theta}{\sin. \theta \cdot \text{cof. } \Phi}$ & cofinus $= \frac{\sin. \theta \cdot \text{cof. } \Phi}{\sqrt{(1 + \sin. \theta^2 \cdot \sin. \Phi^2)}}$ $= \sin. \theta \cdot \text{cof. } \eta$. Hocque pacto natura sectionis facillime cognoscitur.

T A B. 68. Expositis ergo sectionibus Cylindri, ad Conum progrediamur, sive rectum sive scalenum: eo vero tantum Conum XXXV. scalenum a recto differre considero, quod in scaleno sectiones Fig. 134. ad Axem Coni normales sint Ellipses sua Centra in Axe Coni habentes; dum in recto haec sectiones sunt Circuli. Sit igitur $O a e b f O$ Conus quicumque Verticem in O & Axem $O c$ habens; quem ad planum tabulae pono normalem, ita ut tabula representet planum per Coni Verticem O ductum & ad Axem Coni $O c$ normale. Ducantur per O in plano tabulae rectae AB, EF Axibus $a b$ & $e f$ cujusque sectionis Axi normalis parallelae. Quod si ergo ex sectionis $a e b f$ puncto quocunque M ad planum tabulae demittatur normalis $M Q$, & ex Q ad AB perpendicularum $P Q$; si ponantur $O P = x$, $P Q = y$, $Q M = z$, erit quoque sectionis Abscissa $c p = x$, Applicata $p M = y$; unde, cum Axes $a b, e f$ ad $O c = Q M = z$, constantem teneant rationem, si ponatur $a c = b c = m z$ & $e c = f c = n z$, erit $m^2 n^2 z z = m m y y + n n x x$; quae est aequatio naturam Superficie Conicae exprimens, inter tres variables x, y & z .

69. Cum igitur omnes sectiones Axi $O c$ normales sint Ellipses, uti ex aequatione $m^2 n^2 z^2 = m^2 y^2 + n^2 x^2$ (tribuendo ipsi

ipſi z valorem conſtantem) apparet; ſimili modo facile cognofcentur ſectiões, quæ vel ad rectam AB vel EF erunt normales. Si enim iſte Conus ſecetur plano ad AB normali & per punctum P tranſeunte, poſito $OP = a$, iſta pro ſectiõe habebitur æquatio $m^2 n^2 z^2 = m^2 y^2 + n^2 a^2$; inter Coordinatas $Pp = z$, & $pM = y$; quam propterea patet eſſe Hyperbolam Centrum in P habentem, cujus ſemiaxis tranſverſus erit $= \frac{a}{m}$, & ſemiaxis conjugatus $= \frac{na}{m}$. Pari modo, ſi y ponatur conſtans, ſectiõ rectæ EF normalis intelligetur eſſe Hyperbola Centrum habens in ipſa recta EF .

TAB.
XXXVI.
Fig. 135.

70. Si planum, quo Conus ſecatur, fit quidem perpendicularẽ ad planum $AEBF$, at vero ad neutram Linearum AB , EF normale, facile quoque ſectiõ Coni definitur. Secet enim hoc planum Baſin $AEBF$ recta BE , ac vocetur $OB = a$, $OE = b$. Jam, ex puncto ſectiõnis quovis M demittatur normalis MQ , & ex Q Applicata QP , ut ſit $OP = x$, $PQ = y$, & $QM = z$; atque, ex natura Coni, $m^2 n^2 z^2 = m^2 y^2 + n^2 x^2$. Erit ergo $a : b = a - x : y$, ſeu $y = b - \frac{bx}{a}$. Ponantur ſectiõnis Coordinatæ $BQ = t$, & $QM = z$: erit $b : \sqrt{(aa + bb)} = y : t$; ideoque $y = \frac{bt}{\sqrt{(aa + bb)}}$, & $a - x = \frac{at}{\sqrt{(aa + bb)}}$. Sit $\sqrt{(aa + bb)} = c$; erit $y = \frac{bt}{c}$; $x = a - \frac{at}{c}$, atque prodibit inter t & ſequens æquatio

$$m^2 n^2 c^2 z^2 = m^2 b^2 t^2 + n^2 a^2 c^2 - 2nnaact + nnaatt.$$

Fiat $t - \frac{nnaac}{m^2 b^2 + n^2 a^2} = GQ = u$, exiſtente $BG = \frac{nnaac}{m^2 b^2 + n^2 a^2}$, & erit $m^2 n^2 c^2 z^2 = (m^2 b^2 + u^2 a^2) uu + \frac{m^2 n^2 a^2 o^2 c^2}{m^2 b^2 + n^2 a^2}$.

71. Erit ergo hæc Coni ſectiõ Hyperbola Centrum habens in

APPEND. in puncto G , cujus semiaxis transversus erit $Ga = \frac{ab}{\sqrt{(m^2b^2 + n^2a^2)}}$; & semiaxis conjugatus $= \frac{mnabc}{m^2b^2 + n^2a^2}$. Asymptotæ vero hujus Hyperbolæ, quæ Axem Ga in Centro G decussabunt, cum Axe Ga facient angulum, cujus tangens est $= \frac{mnc}{\sqrt{(m^2b^2 + n^2a^2)}}$. Quo ergo sectio fiat Hyperbola æquilatera, oportet esse $m^2n^2aa + m^2n^2b^2 = m^2b + n^2a^2$, seu $\frac{b}{a} = \text{tang. } OBE = \frac{n\sqrt{(mn-1)}}{m\sqrt{(1-mn)}}$. Nisi ergo sit $\frac{m-1}{1-n}$ major nihilo, Hyperbola æquilatera hoc modo oriri nequit. In Cono recto, quidem ubi est $m=n$, anguli, quem Asymptotæ cum Axe sectionis constituunt, tangens erit $= m$, & angulus $=$ angulo aOc .

T A B.
XXXV.
Fig. 134.
T A B.
XXXVI.
Fig. 136.

72. Sit nunc sectio obliqua, ita tamen ut ejus intersectio BT cum plano $AEBF$ sit normalis ad rectam AB . Ponatur $OB=f$, & angulus inclinationis plani ad planum Basis, seu angulus $OBc = \phi$, ita ut hoc planum secans Axem Coni OC in puncto C trajiciat; erit $BC = \frac{f}{\cos. \phi}$; & $OC = \frac{f \sin. \phi}{\cos. \phi}$. Ex sectionis quæsitæ puncto quovis M ad BT ducatur perpendicularis MT ; tum vero ad planum Basis perpendiculum MQ ; & ex Q ad OB normalis QP : ita ut, positis $OP=x$, $PQ=y$, & $QM=z$, habeatur $m^2n^2z^2 = m^2y^2 + n^2x^2$. Ponantur pro sectione Coordinatæ $BT=t$, $TM=u$; erit, ob angulum $QTM = \phi$, $QM = z = u \sin. \phi$; $TQ = u \cos. \phi = f - x$; unde fit $y = t$; $z = u \sin. \phi$; & $x = f - u \cos. \phi$; ideoque

$$m^2n^2u^2 \sin. \phi^2 = m^2t^2 + n^2(f - u \cos. \phi)^2.$$

73. Ponatur $BC = \frac{f}{\cos. \phi} = g$, ut fiat $f = g \cos. \phi$, erit $x = (g - u) \cos. \phi$; atque pro sectione erit

$$m^2 n^2 u^2 . \sin . \Phi^2 = m^2 v^2 + n^2 g^2 . \cos . \Phi^2 - 2 n^2 g u . \cos . \Phi^2 + n^2 u^2 . \cos . \Phi^2 . \text{CAP. III.}$$

$$\text{Statuatur } u = \frac{g . \cos . \Phi^2}{\cos . \Phi^2 - m^2 . \sin . \Phi^2} = SG = s, \text{ ducta } MS$$

$$\text{parallela ipsi } BT, \text{ sumtaque } BG = \frac{g . \cos . \Phi^2}{\cos \Phi^2 - m^2 . \sin . \Phi^2} =$$

$$\frac{f . \cos . \Phi}{\cos . \Phi^2 - m^2 . \sin . \Phi^2} = \frac{f . \cos . \Phi}{1 - (1 + m^2) . \sin . \Phi^2}; \text{ ita ut Coordina-}$$

tæ sint $GS = s$ & $SM = t$, atque nascetur hæc æquatio

$$m^2 tt + mn (\cos . \Phi^2 - m^2 . \sin . \Phi^2) ss - \frac{mmnff \sin \Phi^2}{(\cos . \Phi^2 - m^2 . \sin . \Phi^2)} = 0.$$

Erit ergo Curva Sectio conica Centrum habens in G . Eritque ergo Parabola si Centrum G in infinitum abit, quod fit

$$\text{si } \text{tang. } \Phi = \frac{1}{m}; \text{ seu, si recta } BC \text{ fuerit lateri Coni } Oa$$

T A B.
X X X V.
Fig. 134.

parallela. Hoc vero casu erit $mmt + mnff - 2mnf . \cos . \Phi = 0$:

T A B.
X X X V I.
Fig. 136.

Vertex Parabolæ erit in G , sumta $EG = \frac{f}{2 \cos \Phi}$; & Latus

$$\text{rectum erit } = \frac{2mf . \cos . \Phi}{mm}.$$

74. Quoniam sectio est Parabola, si fuerit $\cos . \Phi^2 - m^2 . \sin . \Phi^2 = 0$; manifestum est eam fore Ellipsin, si sit $\cos . \Phi^2$

major quam $m^2 . \sin . \Phi^2$, seu $\text{tang. } \Phi$ major quam $\frac{1}{m}$, quo quidem casu recta BC sursum converget cum latere Coni opposito

Oa . Cum igitur sit $BG = \frac{g}{1 - m^2 . \text{tang. } \Phi^2}$, erit BG major quam BC , existente G sectionis quæsitæ Centro. Erit ergo sectionis quæsitæ semiaxis in directione BC positus =

$$\frac{mf . \sin . \Phi}{\cos . \Phi^2 - m^2 . \sin . \Phi^2}, \text{ alter vero semiaxis conjugatus } =$$

$$\frac{n f . \sin . \Phi}{\sqrt{(\cos . \Phi^2 - m^2 . \sin . \Phi^2)}}, \text{ \& semilatus rectum } = \frac{n n}{m} f . \sin . \Phi.$$

Unde sectio erit Circulus, si fuerit $m = n \sqrt{(\cos . \Phi^2 - m^2 . \sin . \Phi^2)}$

$$\text{seu } mm = nn - mn (1 + mm) . \sin . \Phi; \text{ hincque fit } \sin . \Phi = \frac{\sqrt{mm - mnn}}{n \sqrt{1 + mm}} = \sin . OBC, \text{ \& } \cos . \Phi = \frac{m \sqrt{1 + mm}}{n \sqrt{1 + mm}}.$$

Nisi ergo sit n major quam m , nulla hujusmodi sectio esse poterit Circulus.

APPEND.

75. Si fuerit $m^2 \cdot \sin. \Phi^2$ major quam $\cos. \Phi^2$, seu $\tan. \Phi$ major quam $\frac{1}{m}$; ita ut recta BC cum latere Coni opposito Oa sursum divergat, sectio erit Hyperbola, cujus semilatus transversum erit $= \frac{mf \cdot \sin. \Phi}{\cos. \Phi^2 + m^2 \cdot \sin. \Phi^2}$, & semilatus conjugatum $= \frac{nf \cdot \sin. \Phi}{\sqrt{(m^2 \cdot \sin. \Phi^2 - \cos. \Phi^2)}}$; ac semilatus rectum $= \frac{nn}{m} f \cdot \sin. \Phi$, & anguli, sub quo Asymptotæ Axem in Centro G decussant, tangens erit $= \frac{n}{m} \sqrt{(m^2 \cdot \sin. \Phi^2 - \cos. \Phi^2)}$. Quare Hyperbola erit æquilatera si fuerit $m^2 n^2 \cdot \sin. \Phi^2 - n^2 \cdot \cos. \Phi^2 = m^2 = (mm + 1)nn \cdot \sin. \Phi^2 - nn = mm$, seu $\sin. \Phi = \frac{\sqrt{(mm + 1)}}{n\sqrt{(1 + mm)}}$, & $\cos. \Phi = \frac{m\sqrt{(m-1)}}{n\sqrt{(1 + mm)}}$. Ad hoc ergo necesse est ut sit n major unitate, alioquin Hyperbola æquilatera per sectionem hujusmodi produci nequit.

TAB.
XXXVI.
Fig. 137.

76. Si Conus est rectus, seu $m = n$, tum omnes sectiones, ad has, quas evolvimus referri possunt, quia positio rectæ AB ab arbitrio nostro pendet. At pro Cono scaleno superest, ut investigemus sectiones quæ a plano utcunque oblique ad rectam AB posito formantur. Sit igitur BR intersectio plani secantis cum plano Basis $AEBF$. Ponatur $OB = f$, angulus $OBR = \theta$, & angulus inclinationis secantis ad Basin $= \Phi$; erit, demisso ex O in BR perpendicularo OR , $OR = f \cdot \sin. \theta$ & $BR = f \cdot \cos. \theta$. Tum, ducta in plano secante recta RC , erit, ob angulum $ORC = \Phi$, $RC = \frac{f \cdot \sin. \theta}{\cos. \Phi}$ & $OC = \frac{f \cdot \sin. \theta \cdot \sin. \Phi}{\cos. \Phi}$. Si jam sectio ad Axem Coni OC normalis in planum Basis projiciatur, erunt ejus Axes principales secundum rectas AB & EF dispositi, alterque erit ut m alter ut n .

77. In hac sectione projecta ducatur Diameter ef parallela ipsi BR : erit angulus $BOe = \theta$; sitque aOb positio Diametri

metri ejus conjugata. Ponatur semidiameter $Oa = \mu$, CAP. III.
 $Oe = \nu$, erit

$$\mu = \frac{\sqrt{m^4 \cdot \sin.\theta^2 + n^4 \cdot \cos.\theta^2}}{\sqrt{(m^2 \cdot \sin.\theta^2 + n^2 \cdot \cos.\theta^2)}} \&$$

$$\nu = \frac{mn}{\sqrt{(m^2 \cdot \sin.\theta^2 + n^2 \cdot \cos.\theta^2)}},$$

atque

$$\text{tang. } BOb = \frac{mn \cdot \cos.\theta}{mm \cdot \sin.\theta},$$

cujus anguli propterea erit

$$\text{Sinus} = \frac{nn \cdot \cos.\theta}{\sqrt{(m^4 \cdot \sin.\theta^2 + n^4 \cdot \cos.\theta^2)}} \&$$

$$\text{Cosinus} = \frac{mm \cdot \sin.\theta}{\sqrt{(m^4 \cdot \sin.\theta^2 + n^4 \cdot \cos.\theta^2)}}.$$

Jam est angulus $ObR = \theta + BOb$: ergo

$$\sin. ObR = \frac{m^2 \cdot \sin.\theta^2 + n^2 \cdot \cos.\theta^2}{\sqrt{(m^4 \cdot \sin.\theta^2 + n^4 \cdot \cos.\theta^2)}}, \&$$

$$\cos. ObR = \frac{(mm - nn) \cdot \sin.\theta \cos.\theta}{\sqrt{(m^4 \cdot \sin.\theta^2 + n^4 \cdot \cos.\theta^2)}}.$$

At est

$$\mu\nu = \frac{mn \cdot \sqrt{(m^4 \cdot \sin.\theta^2 + n^4 \cdot \cos.\theta^2)}}{mm \cdot \sin.\theta^2 + nn \cdot \cos.\theta^2}.$$

78. Cum igitur sit $OR = f \cdot \sin.\theta$, erit

$$Ob = \frac{OR}{\sin. ObR} = \frac{f \cdot \sin.\theta \sqrt{(m^4 \cdot \sin.\theta^2 + n^4 \cdot \cos.\theta^2)}}{m^2 \cdot \sin.\theta^2 + n^2 \cdot \cos.\theta^2} \&$$

$$Rb = \frac{(mm - nn) \cdot f \cdot \sin.\theta \cdot \cos.\theta}{m^2 \cdot \sin.\theta^2 + n^2 \cdot \cos.\theta^2}.$$

Hinc, ex Triangulo RbC ad R rectangulo, erit anguli ClR

tangens = $\frac{m^2 \cdot \sin.\theta^2 + n^2 \cdot \cos.\theta^2}{(m^2 - n^2) \cdot \sin.\theta \cdot \cos.\theta \cdot \cos.\theta}$: unde, angulus CbR

erit cognitus. Jam, ex puncto sectionis quovis M ad rectam RT ducatur MT parallela ipsi Cb , atque ex M ad Cb pa-

Euleri *Introducē. in Anal. infin. Tom. II.* Z z rallela

APPEND.

parallela MS ipsi RT : vocenturque $bT = MS = t$; $bS = TM = u$; quæ, tanquam Coordinatæ obliquangulæ sectionis quæritæ spectentur, existente anguli bSM tangente $= \frac{m^2 \sin \theta^2 + n^2 \cos \theta^2}{(m^2 - n^2) \sin \theta \cos \theta \cdot \cos \Phi}$. Patet ergo has Coordinatas fieri orthogonales in Cono recto, propterea quia fit $m = n$.

79. Ex puncto sectionis M ad planum $AEBF$ demittatur perpendicularum MQ ; junctaque TQ erit parallela Diametro ab ; tum ex Q ducatur ordinata QP alteri Diametro ef parallela. Atque, vocatis $OP = x$; $PQ = y$ & $QM = z$; erit, ex natura Coni

$$\mu^2 v^2 z^2 = \mu^2 y^2 + v^2 x^2.$$

Namque, si per punctum M concipiatur Coni sectio Basi parallela, erunt ejus semidiametri rectis ab & ef parallelae μz & vz . At, cum inventa sint Trianguli rectanguli COB latera OC & Ob , erit Hypothenusa

$$Cb = \frac{f \sin \theta \sqrt{m^4 \sin \theta^2 + n^4 \cos \theta^2} - (m^2 - n^2)^2 \sin \theta^2 \cos \theta^2 \sin \Phi^2}{(m^2 \sin \theta^2 + n^2 \cos \theta^2) \cos \Phi}$$

& ob Triangula TMQ , bCO similia, erit

$$TM(u) : TQ(Ob - x) : QM(z) = bC : Ob : OC$$

ergo $x = Ob - \frac{Ob \cdot u}{Cb}$; $z = \frac{OC \cdot u}{Cb}$; & $y = t$; ideoque

$$\mu^2 v^2 \cdot OC^2 \cdot u^2 = \mu^2 \cdot Cb^2 \cdot t^2 + v^2 \cdot Ob^2 (Cb - u)^2$$

80. Æquatio hæc evoluta dabit hanc

$$= \mu^2 \cdot Cb^2 \cdot tt + v^2 (Ob^2 - \mu^2 \cdot Oc^2) uu - 2v^2 \cdot Ob^2 \cdot Cb \cdot u + v^2 \cdot Ob^2 \cdot Cb^2,$$

n qua si ponatur $u = \frac{Ob^2 \cdot Cb}{Ob^2 - \mu^2 \cdot Oc^2} = s$; seu, sumpta $bG =$

$$\frac{Ob^2 \cdot Cb}{Ob^2 - \mu^2 \cdot Oc^2} = \frac{Cb}{1 - (m^2 \sin \theta^2 + n^2 \cos \theta^2) \tan \Phi^2}, \text{ \& vocata}$$

cata $GS = s$; erit G Centrum sectionis conicæ cujus α -CAP. III.
 quatio inter Coordinatas t & s erit

$$\mu^2 Cb^2.tt + v^2 (Ob^2 - \mu^2.Oc^2)ss = \frac{\mu^2.v^2.Ob^2.Oc^2.Cb^2}{Ob^2 - \mu^2.Oc^2},$$

cujus semidiameter transversus erit $= \frac{\mu.Ob.Oc.Cb}{Ob^2 - \mu^2.Oc^2}$, & se-

midiameter conjugatus $= \frac{v.Ob.Oc}{\sqrt{(Ob^2 - \mu^2.Oc^2)}}$, & semilatus

rectum $= \frac{v.v.Ob.Oc}{\mu.Cb}$. Ceterum apparet si sit $tang. \phi$ minor

quam $\frac{1}{\sqrt{(m^2.sin.b^2 + n^2.cos.b^2)}}$, seu $tang. \phi$ minor quam $\frac{v}{mn}$,

Curvam fore Ellipsin; si sit $tang. \phi = \frac{v}{mn}$, Parabolam; & si

$tang. \phi$ major quam $\frac{v}{mn}$, Hyperbolam.

81. Tertium Corpus, cujus sectiones plano factas hic investigare constituimus, est Globus, cujus quidem omnes sectiones planas Circulos esse ex Geometiia elementari constat. Interim tamen quo methodus clarius perspiciatur, quemadmodum ex data æquatione pro Solido quocunque ejus sectiones quævis erui debeant, idem negotium hic analytice absolvam quod vulgo synthetice tradi solet. Sit igitur C Centrum Globi, per quod planum tabulæ transire concipiatur, ita ut sectio hoc plano facta sit Circulus maximus, cujus radius $CA = CB$; ponatur $= a$, qui simul erit radius Globi. Sit porro recta DT intersectio plani secantis cum isto plano tabulæ, ad quam ex C ducatur normalis CD , quæ sit $= f$, angulus autem inclinationis sit $= \phi$.

ТА В.
 XXXVII.
 Fig. 138.

82. Sit M punctum sectionis quævis quocunque; unde ad planum tabulæ demittatur perpendicularum MQ hincque ad rectam CD pro Axe assumptam perpendicularis QP . Quod si jam vocentur Coordinatæ $CP = x$, $PQ = y$ & $QM = z$; erit, ex natura Globi, $xx + yy + zz = aa$. Ducatur ex M pariter ad rectam DT normalis MT ; & juncta QT , ob ambas QT & MT ad DT normales, metietur angulus MTQ

APPEND. inclinationem plani secantis ad planum Basis, quæ est $= \phi$.
 Quare si DT & MT tanquam Coordinatæ sectionis quæsitæ spectentur, vocenturque $DT = t$, $TM = u$, fiet $MQ = u \cdot \sin. \phi$, & $TQ = u \cdot \cos. \phi$. Erit ergo $CP = x = f - u \cdot \cos. \phi$; $PQ = y = t$; & $QM = z = u \cdot \sin. \phi$. Quibus valoribus substitutis emerget æquatio pro sectione Globi quæsitæ hæc

$$ff - 2fu \cdot \cos. \phi + uu + tt = aa.$$

83. Perpicuum jam est hanc æquationem esse pro Circulo. Namque si ponatur $u = f \cdot \cos. \phi = s$, fiet

$$ff \cdot \sin. \phi^2 + ss + tt = aa.$$

unde radius sectionis erit $= \sqrt{aa - ff \cdot \sin. \phi^2}$. Quare, si ex D Applicatæ TM parallela ducatur Dc , in eamque ex Centro C perpendicularum demittatur Cc , ob $CD = f$ & angulum $CDc = \phi$, erit $Dc = f \cdot \cos. \phi$ & $Cc = f \cdot \sin. \phi$. Hinc, cum Coordinatæ s & t ad Centrum referantur, erit punctum c Centrum sectionis, & $\sqrt{CB^2 - Cc^2}$ radius istius Circuli, uti ex Elementis est manifestum. Simili autem modo omnium aliorum Solidorum, dummodo eorum natura sit æquatione inter tres variabiles expressa, sectiones quæcunque planis factæ investigari poterunt.

T A B.
 XXXVII.
 Fig. 139.

84. Quo tamen tota operatio melius perspiciatur, proponatur Solidum quodcunque, cujus natura sit expressa æquatione inter ternas Coordinatas $AP = x$, $PQ = y$ & $QM = z$; quarum illæ positæ sint in plano tabulæ hæc vero z sit ad planum normalis. Secetur jam hoc Solidum plano quocunque, cujus cum plano tabulæ intersectio sit recta DT , & inclinationis angulus $= \phi$. Ponatur recta $AD = f$, angulus $ADE = \theta$; eritque, demisso ex A in DE perpendicularo AE , $AE = f \cdot \sin. \theta$ & $DE = f \cdot \cos. \theta$. Tum, ex sectionis quæsitæ puncto M ad DT ducatur perpendicularis MT ; junctaque QT , æquabitur angulus MTQ inclinationi datæ ϕ . Quare, si

si DT & TM pro Coordinatis sectionis quaesitae accipiantur, & vocentur $DT = t$, $TM = u$, erit $QM = u \cdot \sin. \phi$, & $TQ = u \cdot \cos. \phi$.

85. Ex T ad Axem AD demittatur perpendicularum TV ; atque, ob angulum $TDV = \theta$, erit $TV = t \cdot \sin. \theta$ & $DV = t \cdot \cos. \theta$. Quia porro angulus TQP est $= \theta$, erit $PV = u \cdot \sin. \theta \cdot \cos. \phi$ & $PQ - TV = u \cdot \cos. \theta \cdot \cos. \phi$. Ex his itaque Coordinatae x , y , & z sequenti modo per t & u definiuntur ut sit

$$\begin{aligned} AP = x &= f + t \cdot \cos. \theta - u \cdot \sin. \theta \cdot \cos. \phi \\ &\quad \& \\ PQ = y &= t \cdot \sin. \theta + u \cdot \cos. \theta \cdot \cos. \phi \\ &\quad \text{atque} \\ QM = z &= u \cdot \sin. \phi. \end{aligned}$$

Quare, si isti valores in aequatione inter x , y , & z pro Solido data substituuntur, obtinebitur aequatio inter t & u , seu Coordinatas sectionis quaesitae, cujus adeo natura innotescet. Convenit autem hic modus fere cum eo, quo supra §. 50. isti sumus.

C A P U T I V.

De immutatione Coordinatarum.

86. **Q**uemadmodum aequationes pro Lineis curvis in eodem plano fitis in innumerabiles formas diversas transformari possunt, immutandis cum Abscissarum initio, tum Axis positione, tum utroque: ita in praesenti negotio multo adhuc major varietas locum habet. Primum enim in eodem plano, in quo binae Coordinatae sunt sitae, haec infinitis modis variari possunt. Deinde vero hoc ipsum planum, quod duas

APPEND. continet Coordinatas mutari, sicque prior varietas in infinitum augeri poterit. Data scilicet æquatione inter tres Coordinatas inter se normales, perpetuo inveniri potest alia æquatio inter tres quascunque alias Coordinatas pariter inter se normales, quarum positio respectu priorum infinities magis variari potest, quam si duæ tantum essent Coordinatæ, uti usu venit in æquationibus Linearum curvarum.

87. Ponamus primum solum Abscissarum x initium in Axe mutari, ita ut binæ reliquæ Coordinatæ y & z maneant eadem; atque nova Abscissa quantitate constante ab x discrepabit. Sit igitur nova Abscissa $= t$, erit $x = t \pm a$ quo valore in æquatione pro Superficie substituto prodibit æquatio inter tres Coordinatas t , y & z quæ, etsi a priori diversa, tamen pro eadem erit Superficie. Simili modo reliquæ Coordinatæ y & z quantitibus constantibus augeri minuive poterunt: atque, si ponatur $x = t + a$; $y = u \pm b$ & $z = v \pm c$, oriatur æquatio inter tres variables t , u , & v pro eadem Superficie: atque adeo hæ novæ Coordinatæ prioribus erunt parallelæ. Interim hoc modo æquatio pro Superficie, etsi est magis generalis, tamen non multum variatur.

T A B.
XXXVII.
Fig. 140.

88. Quoniam tres Coordinatæ orthogonales, quarum æquatio naturam Superficieï exprimit, ad tria plana inter se normalia referuntur, ponamus planum unum in quo binæ Coordinatarum x & y capiuntur, invariatur manere, in eo autem Lineam quamcunque aliam CT , præter AP , pro Axe assumi. Cum igitur priores Coordinatæ pro Axe AP essent $AP = x$, $P = y$, $QM = z$, pro novo Axe CQ manebit Coordinata $QM = z$ eadem, at binæ reliquæ evadent $CT = t$, $TQ = u$, ducta QT ad novum Axem CT normali. Ad æquationem igitur inter has novas Coordinatas t , u & z inveniendam, ducatur CR parallela priori Axi AP , tum ex C ad eum perpendicularis ducatur CB , ac vocetur $AB = a$, $BC = b$; & angulus $RCT = \zeta$. Denique ducatur TR normalis ad CR & ex T in QP productam perpendicularum TS .

89. His factis; in Triangulo TCR erit $TR = t. \sin. \zeta$, CAP. IV.
 $CR = t. \cos. \zeta$: in Triangulo autem QTS , cujus angulus ad Q pariter erit $= \zeta$, fiet $TS = u. \sin. \zeta$, & $QS = u. \cos. \zeta$.
 Ex his jam obtinebitur $AP = x = CR + TS - AB =$
 $t. \cos. \zeta + u. \sin. \zeta - a$; & $QP = QS - TR - BC =$
 $y = u. \cos. \zeta - t. \sin. \zeta - b$. Quod si ergo isti valores loco
 x & y in æquatione pro Superficie proposita substituantur,
 resultabit æquatio inter ternas novas Coordinatas t , u & z ,
 qua ejusdem Superficiæ natura exprimetur. Hæc igitur nova
 æquatio multo latius patentem speciem præ se feret, cum in
 eam ingredientur tres novæ constantes arbitrariæ a , b & an-
 gulus ζ , quæ in priori æquatione non inerant. Hæcque erit
 æquatio generalis: quando quidem idem planum, in quo binæ
 Coordinatæ x & y versantur, retineatur.

90. Varietur nunc quoque planum, in quo binæ priores TAB.
 Coordinatæ x & y erant assumtæ: ac primo quidem ita ut XXXVII.
 intersectio novi plani cum priori APQ incidat in ipsam rectam Fig. 141.
 AP , quæ etiam pro novis Coordinatis tanquam Axis spectetur.
 Sit igitur APT hoc novum planum, cujus ad prius
 APQ inclinatio erit angulus QPT , qui ponatur η . Ex M
 in PT ducatur normalis MT , quæ simul in novum planum
 erit perpendicularis & vicem tertiæ Coordinatæ tenebit. Ponantur
 ergo tres novæ Coordinatæ $AP = x$, $PT = u$, & $TM = v$: &,
 ducta TR ad PQ , & TS ad QM normali, erit $TR = u. \sin. \eta$,
 $PR = u. \cos. \eta$; $TS = v. \sin. \eta$ & $MS = v. \cos. \eta$.
 Hinc erit $PQ = y = u. \cos. \eta - v. \sin. \eta$ & $QM = z = v. \cos. \eta + u. \sin. \eta$,
 qui valores, in æquatione proposita pro y & z substituti, dabunt æquationem inter tres
 novas Coordinatas x , u & v , qua ejusdem Superficiæ natura exprimetur.

91. Cadat nunc intersectio novi plani secantis cum plano TAB.
 APQ in Lineam quamcunque CT , sitque η inclinatio isto- XXXVII.
 rum planorum; ac sumatur recta hæc CT pro Axe in hoc Fig. 140.
 plano. Queratur primum æquatio inter Coordinatas in plano
 APQ ad Axem CT relatas, quæ ex præcedentibus ita reperietur,

APPEND. perietur, ut, positis $AB = a$, $BC = b$, angulo $TCR = \zeta$, & Coordinatis $CT = p$, $TQ = q$, & $QM = r$, ut sit $x = p \cdot \text{cof. } \zeta + q \cdot \text{sin. } \zeta - a$; $y = q \cdot \text{cof. } \zeta - p \cdot \text{sin. } \zeta - b$, & $z = r$. Nunc vero ex §. præcedente, positis novis Coordinatis t , u , & v , fiet $p = t$; $q = u \cdot \text{cof. } \eta - v \cdot \text{sin. } \eta$, & $r = v \cdot \text{cof. } \eta + u \cdot \text{sin. } \eta$. His substitutis, Coordinatæ principales x , y , z ex novis ita determinabuntur ut sit

$$\begin{aligned} x &= t \cdot \text{cof. } \zeta + u \cdot \text{sin. } \zeta \cdot \text{cof. } \eta - v \cdot \text{sin. } \zeta \cdot \text{sin. } \eta - a \\ &\quad \& \\ y &= -t \cdot \text{sin. } \zeta + u \cdot \text{cof. } \zeta \cdot \text{cof. } \eta - v \cdot \text{cof. } \zeta \cdot \text{sin. } \eta - b \\ &\quad \text{atque} \\ z &= u \cdot \text{sin. } \eta + v \cdot \text{cof. } \eta. \end{aligned}$$

TAB. 92. Sumatur jam in plano isto novo, in quo Coordinatæ
 XXXVII. t & u sunt sitæ, alia Linea quæcunque pro Axe; sicque orietur
 Fig. 140. æquatio generalissima pro Superficie proposita. Sint in hunc
 finem AP , PQ , QM Coordinatæ t , u , & v , quas modo
 invenimus; ita ut AP repræsentet interfectionem memorati
 plani cum plano in quo principales Coordinatæ x & y positæ
 concipiuntur. Sitque recta CT novus Axis ad quem novæ
 generalissimæ Coordinatæ, quas quærimus, referantur, quæ vo-
 centur, $CT = p$, $TQ = q$, & $QM = r$. Præterea, sunt
 AB & BC Lineæ constantes, angulus autem CTR ponatur
 $= \theta$. His positis erit ex §. 89.

$$\begin{aligned} t &= p \cdot \text{cof. } \theta + q \cdot \text{sin. } \theta - AB \\ &\quad \& \\ u &= -p \cdot \text{sin. } \theta + q \cdot \text{cof. } \theta - BC \\ &\quad \text{atque} \\ v &= r. \end{aligned}$$

Qui valores si substituantur in expressionibus §. præcedentis
 reperietur

$x =$

$$x = p (\cos. \zeta. \cos. \theta - \sin. \zeta. \cos. \eta. \sin. \theta) + q (\cos. \zeta. \sin. \theta + \sin. \zeta. \cos. \eta. \cos. \theta) - r. \sin. \zeta. \sin. \eta + f \quad \text{CAP. IV.}$$

&

$$y = -p (\sin. \zeta. \cos. \theta + \cos. \zeta. \cos. \eta. \sin. \theta) - q (\sin. \zeta. \sin. \theta - \cos. \zeta. \cos. \eta. \cos. \theta) - r. \cos. \zeta. \sin. \eta + g$$

atque

$$z = -p. \sin. \eta. \sin. \theta + q. \sin. \eta. \cos. \theta + r. \cos. \eta + h,$$

ubi f , g & h sunt Lineæ constantes ex compositione earum, quæ in calculum sunt introductæ, ortæ.

93. Patet ergo æquationem generalissimam pro quavis Superficie sex constantes arbitrarias complecti, quæ utcumque determinantur, æquatio perpetuo ejusdem Superficiæ naturam exprimet. Quantumvis autem simplex & succincta fuerit æquatio pro Superficie inter Coordinatas x , y , z , si ex ea confectur æquatio generalissima inter p , q , & r , ea ob ingentem constantium arbitrariorum numerum necessario fiet maxime intricata: præsertim, si altiores dimensiones ipsarum x , y , & z affuerint. Vix igitur dari poterit casus, in quo conveniret ad æquationem generalissimam assurgere. Quanquam enim ea utilitas inde percipi posset, ut idoneo modo constantibus illis definiendis æquatio simplicissima redderetur; tamen, ob calculi prolixitatem, hic labor plerumque fieret molestissimus. Interim tamen in sequentibus ista methodus æquationes generalissimas formandi usu non carebit, quoniam inde egregiæ proprietates elicientur ac demonstrabuntur.

94. Quanquam autem æquatio generalissima plerumque sit maxime complicata; tamen, si ad dimensiones, quas Coordinatæ junctim sumtæ constituunt, spectemus, earum numerus perpetuo æqualis est numero dimensionum, quas primæ Coordinatæ x , y & z confecerunt. Sic, cum æquatio pro Sphæra $xx + yy + zz = aa$ sit duarum dimensionum, æquatio quoque generalissima non plures quoque quam duas continebit dimensiones Coordinatarum p , q , & r . Hinc numerus dimensionum, quas Coordinatæ in æquatione cujuscumque Superficiæ

Euleri *Introduct. in Anal. infin. Tom. II.* A a a consti-

APPEND.

constituunt, nobis suppeditat essentialem characterem naturæ istius Superficiæ; propterea quod, utcumque positio Coordinatarum varietur, perpetuo tamen idem dimensionum numerus emergit. Similis scilicet hic ratio circa Superficiæ observatur, quam supra in Lineis curvis deprehendimus; unde eas in certos ordines divisimus. Eodem ergo modo conveniet Superficiæ secundum dimensiones Coordinatarum in ordines disponere: eritque nobis Superficiæ ordinis primi, cujus æquatio unicam tantum dimensionem complectitur: ad ordinem secundum Superficiæ referemus, in cujus æquatione Coordinatæ ad duas dimensiones assurgunt; atque ita porro ex dimensionum numero sequentes ordines constituentur.

95. Si jam cum his conferantur ea, quæ supra de inventionem sectionum planarum cujusque Superficiæ tradita sunt, ordinem sectionum perpetuo cum ordine ad quem Superficiæ pertinet, congruere deprehendimus. Sit enim æquatio pro Superficie quacunque proposita inter Coordinatas x , y , & z , ad ordinem n pertinens, sectionis autem ejus cujusvis Coordinatæ normales sint t & u . Atque supra, §. 85, vidimus æquationem inter t & u inveniri, si in æquatione pro Superficie sequentes valores substituantur

$$\begin{aligned} x &= f + t. \cos. \theta - u. \sin. \theta. \cos. \Phi \\ &\quad \& \\ y &= t. \sin. \theta + u. \cos. \theta. \cos. \Phi \\ &\quad \text{atque} \\ z &= u. \sin. \Phi. \end{aligned}$$

Manifestum igitur est æquationem pro sectione plures dimensiones assequi non posse, quam habebat æquatio inter x , y , & z ; sed perpetuo totidem prodituras esse dimensiones.

96. Superficiæ ergo primi ordinis alias sectiones a plano factas habere nequit præter Lineas primi ordinis, seu rectas. Deinde, ex sectione Superficiæ secundi ordinis aliæ Linæ non oriuntur nisi secundi ordinis, seu Sectiones conicæ; est enim

enim Superficies conica quoque secundi ordinis, cum ejus CAP. IV.
æquatio sit

$$zz = \alpha xx + \beta yy.$$

Simili modo, ex Superficie tertii ordinis per sectiones planas prodibunt Lineæ tertii ordinis, atque ita porro. Fieri tamen quandoque potest, ut æquatio pro sectione quapiam divisores admittat; quo casu sectio erit composita ex duabus pluribusve Lineis inferiorum ordinum. Sic, sectio Coni per Verticem facta constabit ex duabus Lineis rectis, quæ tamen conjunctim Lineam secundi ordinis mentiuntur, uti supra annotavimus.

97. Constitutis igitur Superficierum ordinibus, investigemus præ reliquis eas Superficies, quæ ad ordinem primum pertinent. Æquatio ergo earum naturam exprimens erit $\alpha x + \beta y + \gamma z = a$, cujus cum omnes sectiones plano factæ sint Lineæ rectæ, perspicuum est has Superficies non planas esse non posse: si enim haberent convexitatem vel concavitatem, necessario daretur sectio curvilinea. Quanquam enim in reliquis ordinibus dantur ejusmodi Superficies, quarum certæ quædam sectiones sunt Lineæ rectæ, (uti in Cylindro, Cono, aliisque, usu venire vidimus,) tamen in iis sectiones curvilineæ non excluduntur. Similis scilicet hic occurrit ratio, qualem in Lineis observavimus: quemadmodum enim Linea, quæ a Linea recta in pluribus uno punctis nullo modo secari potest, est necessario recta; ita Superficies quæ a plano secta semper dat Lineam rectam, necessario ipsa plana esse colligitur.

98. Ex æquatione autem generalissima ista indoles clarissime potest demonstrari. Formetur enim ex æquatione $\alpha x + \beta y + \gamma z = a$ æquatio generalissima inter Coordinatas p , q , & r , secundum §. 92. Et, quoniam sex novæ constantes arbitrariæ inducuntur, nil obstat, quo minus ea ita determinentur, ut binarum Coordinatarum p , & q coëfficientes evanescant, atque hujusmodi æquatio $r = f$ remaneat, ejusdem Superficiei nam ram exprimens. Hæc autem æquatio $r = f$ ostendet Superficiem propositam esse plano, in quo binæ Coordinatæ p & q

A a a 2

existunt,

APPEND. existunt, parallelam; ideoque ipsam planam: Effici quoque potest, ut fiat $r = 0$; sicque evidens erit, ipsum planum, in quo p & q assumuntur, esse Superficiem quæsitam.

T A B. .99. Cum igitur constet Superficiem æquatione $ax + \beta y + \gamma z = a$ expressam esse planam, opus est ut ejus positionem respectu plani, in quo Coordinatæ x & y assumuntur, definiamus. Sit igitur M punctum quodcunque hujus Superficiæ; atque tres Coordinatæ $AP = x$, $PQ = y$, & $QM = z$. Ponatur primum $z = 0$, atque oriatur æquatio $ax + \beta y = a$, quæ exprimet intersectionem Superficiæ quæsitæ cum plano APQ , quam patet esse Lineam rectam BCR , cujus positio respectu Axis AP talis erit, ut sit recta AB ad Axem AP in plano APQ normalis $= \frac{a}{\epsilon}$, & $AC = \frac{a}{a}$: unde anguli ACB tangens erit $= \frac{a}{\epsilon}$: ideoque sinus $= \frac{a}{\sqrt{(a^2 + \epsilon^2)}}$, & cosinus $= \frac{\epsilon}{\sqrt{(a^2 + \epsilon^2)}}$. Tum, producat QP usque ad occursum rectæ BC in R : atque, ob $CP = x - \frac{a}{a}$, erit $CR = \frac{x\sqrt{(a^2 + \epsilon^2)} - a\sqrt{(a^2 + \epsilon^2)}}{\epsilon}$; & $PR = \frac{ax}{\epsilon} - \frac{a}{\epsilon}$.

100. Demittatur ex Q ad BC normalis QS : junctaque MS , patebit angulum MSQ metiri inclinationem Superficiæ propositæ ad planum APQ . Cum igitur sit $PR = \frac{ax - a}{\epsilon}$, erit $QR = \frac{ax + \epsilon y - a}{\epsilon} = \frac{-\gamma z}{\epsilon}$: &, ob angulum $RQS = ACB$, erit $QS = \frac{-\gamma z}{\sqrt{(a^2 + \epsilon^2)}}$: unde fit anguli QSM tangens $= \frac{-\sqrt{(a^2 + \epsilon^2)}}{\gamma}$; & propterea cosinus $= \frac{\gamma}{\sqrt{(a^2 + \epsilon^2 + \gamma^2)}}$. Superficies ergo quæsitæ ad planum, in quo versantur x & y , inclinatur angulo, cujus tangens est $= \frac{-\sqrt{(a^2 + \epsilon^2)}}{\gamma}$:

pari

pari vero modo eadem Superficies ad planum Coordinatarum CAP. V.
 x & z inclinabitur angulo cujus tangens est $= \frac{-\sqrt{(a^2 + \gamma^2)}}{c}$,
 atque ad planum Coordinatarum y & z angulo cujus tangens
 est $= \frac{-\sqrt{(\xi^2 + \gamma^2)}}{a}$.

C A P U T V.

De Superficiebus secundi ordinis.

101. **C**onstitutis ergo Superficierum ordinibus secundum numerum dimensionum, quas summæ trium Coordinatarum x, y, z potestates in æquatione junctim sumtæ adimplent; si proponatur pro Superficie æquatio algebraïca, statim assignari potest ordo, ad quem illa Superficies referri debet. Cum igitur omnis Superficies primi ordinis ostensa sit esse plana, in hoc Capite Superficies secundi ordinis examini subjiciam. In iis autem major statim deprehenditur diversitas, quam in Lineis secundi gradus, quod quidem cuique attendenti facile patebit. Operam igitur dabo ut hæc diversa genera distincte exponam. In ordinibus vero altioribus tantopere multitudo generum increfcit, ut ab iis evolvendis profus abstinere debeamus.

102. Quoniam natura Superficierum secundi ordinis exprimitur æquatione, in qua variables x, y & z ad duas dimensiones assurgunt, Cylindrus & Conus, tam rectus quam scalenus, & Globus, quorum proprietates jam descripsimus, in hoc secundo ordine continentur. Omnes vero Superficies ad hunc ordinem pertinentes comprehenduntur in hac æquatione generali

$$axz + byz + \gamma xz + \delta xy + \epsilon xy + \zeta xx + \eta z + \theta y + ix + \kappa = 0.$$

Utcunque enim tres Coordinatæ accipiantur, æquatio semper

APPEND. in hac forma continebitur. Varia ergo Superficierum huc pertinentium genera a diversa coëfficientium relatione mutua pendebunt, qui, etsi eadem Superficies infinitis æquationibus exprimat, tamen infinitam variarum Superficierum multitudinem suppeditabunt.

103. Quemadmodum in Lineis curvis planis præcipuam divisionem inde desumimus, quod vel in infinitum extendantur, vel in spatio finito includantur; ita simili modo omnes Superficies ad quemcunque ordinem pertinentes in duas classes dividuntur; ad quarum alteram referemus eas, quæ in infinitum abeunt, ad alteram vero, quæ in spatio finito continentur. Ita Cylindrus & Conus priori classi; Globus vero posteriori annumerabitur. Posterioris quidem classis nulla dabitur Superficies in ordinibus imparibus: cum enim quælibet Superficies imparis ordinis habeat sectiones planas ejusdem ordinis, curvæ autem imparium ordinum omnes in infinitum extendantur, necesse est, ut etiam ipsæ Superficies istorum ordinum in infinitum porrigantur.

104. Quoties autem quæpiam Superficies in infinitum extenditur, necesse est ut, ad minimum, una trium variabilium x , y & z , in infinitum abeat. Quare, cum perinde sit quænam hoc casu infinita fieri assumatur, ponamus z fieri infinitam, si quidem Superficies in infinitum porrigatur. Naturam ergo hujus partis in infinitum abeuntis investigaturi ponamus esse $z = \infty$: atque nunc potissimum spectari debet terminus primus azz , utrum is adsit an vero deficiat. Adsit ergo primum iste terminus in æquatione: atque præ eo termini ηz & ε evanescent, habebiturque pro parte in infinitum excurrente hæc æquatio

$$azz + \zeta yz + \gamma xz + \delta yy + \varepsilon xy + \zeta xx + \theta y + \iota x = 0,$$

ex qua porro omnes termini, qui non sunt infiniti, vel infinitis minores saltem quam azz , evanescent.

105. Statuamus omnes terminos, in quibus variabiles duas tenent

tenent dimensiones adesse; quæcunque enim fuerit Superficies, CAP. V.
 in ejus æquatione generalissima semper omnes inerunt termini
 summarum dimensionum, neque idcirco hypothesis, qua omnes
 terminos duarum dimensionum adesse ponimus, universalitati
 solutionis ullam vim infert. Quando autem termini yz
 & xz adsunt, præ iis termini θy & ιx evanescunt; relinque-
 turque hæc æquatio

$$azz + \epsilon yz + \gamma xz + \delta yy + \epsilon xy + \zeta xx = 0,$$

ex qua elicitur

$$z = \frac{-\epsilon y - \gamma x \pm \sqrt{\epsilon^2 - 4\alpha\delta}yy + (2\epsilon\gamma - 4\alpha\epsilon)xy + (\gamma\gamma - 4\alpha\zeta)xx}{2\alpha}$$

Hac igitur æquatione natura portionis in infinitum extensæ
 exprimitur.

106. Si quam igitur Superficies habeat portionem in infi-
 nitum extensam, ea congruet cum portione infinita Superficiei,
 quæ exprimitur hac æquatione

$$azz + \epsilon yz + \gamma xz + \delta yy + \epsilon xy + \zeta xx = 0,$$

ita ut hæc Superficies sit quasi Asymtota illius Superficiei æ-
 quatione generali expressæ. Quia vero in hac æquatione tres
 variables ubique duas habent dimensiones, erit ea pro Su-
 perficie conica, Verticem in initio Coordinatarum, ubi omnes
 simul evanescunt, habente: semper ergo exhiberi potest
 Superficies conica, quæ erit Asymtota Superficiei propositæ,
 si quidem in infinitum extenditur; seu cujus portio infinita cum
 Superficie proposita vel penitus congruit, vel intervallo tan-
 tum finito ab eo est remota. Uti ergo ramos Curvarum in
 infinitum abeuntes per Lineas rectas Asymtotas distinximus,
 ita Superficierum partes in infinitum extensas per Superficies
 conicas Asymtotas distinguere licebit.

107. Quoties ergo Superficies Asymtota conica erit realis,
 toties Superficies ipsa in infinitum extenditur; atque ita quid-
 dem

APPEND. dem ut utriusque partes infinitæ congruant; sicque ex natura Superficiæ Asymptotæ natura ipsius Superficiæ propositæ colligi poterit. Quod si autem Superficiæ Asymptota fiat imaginaria, ipsa Superficiæ nullam habebit partem in infinitum extensam, sed tota spatio finito includetur. Ad Superficiæ ergo secundi ordinis, quæ in spatio finito contineantur, indagandas, tantum opus est, ut videamus quibus in casibus æquatio pro Superficie Asymptota fiat imaginaria; quod fit, si tota Superficiæ hæc in punctum unicum evanescit. Namque si ullam extensionem haberet, vel punctum extra Verticem situm, necessario in infinitum expandi deberet, propterea quod supra ostendimus, totam rectam quæ per verticem & unum Superficiæ punctum ducitur, in ipsa Superficie esse positum.

108. Quando ergo Superficiæ conica Asymptota, hac æquatione expressa

$$azz + \epsilon yz + \gamma xz + \delta yy + \epsilon xy + \zeta xx = 0,$$

in unicum punctum abit, omnes ejus sectiones per Verticem factæ pariter in idem punctum evanescere debent. Primum ergo, factò $z = 0$, æquatio $\delta yy + \epsilon xy + \zeta xx = 0$, debet esse impossibilis, nisi sit $x = 0$ & $y = 0$, quod evenit si fuerit $4\delta\zeta$ major quam $\epsilon\epsilon$. Deinde idem evenire debet positò vel $x = 0$ vel $y = 0$: erit ergo $4\alpha\delta$ major quam $\epsilon\epsilon$, & $4\alpha\zeta$ major quam $\gamma\gamma$. Nisi ergo in æquatione pro Superficie secundi ordinis

$$azz + \epsilon yz + \gamma xz + \delta yy + \epsilon xy + \zeta xx + \eta z + \theta y + \iota x + \kappa = 0,$$

fuerit $4\delta\zeta$ major quam $\epsilon\epsilon$; $4\alpha\delta$ major quam $\epsilon\epsilon$; $4\alpha\zeta$ major quam $\gamma\gamma$, Superficiæ certo habebit partes in infinitum extensas.

109. Neque vero hæc tres conditiones sufficiunt ad Superficiem in spatium finitum includendam: requiritur insuper ut valor ipsius z ex æquatione Asymptotica supra erutus fiat imaginarius; quod fit si ista expressio

$$(66 - 4\alpha d)yy + 2(6\gamma - 2\alpha\epsilon)xy + (\gamma\gamma - 4\alpha\zeta)xx$$

perpetuo obtineat valorem negativum, si quidem pro utraque variabili x & y valores quicunque præter 0 substituuntur. Quod, cum $66 - 4\alpha d$ & $\gamma\gamma - 4\alpha\zeta$ sint quantitates negativæ, fiet si $(6\gamma - 2\alpha\epsilon)^2$ minor quam $(66 - 4\alpha d)(\gamma\gamma - 4\alpha\zeta)$; hoc est, si fuerit $\alpha\epsilon^2 + d\gamma^2 + \zeta^2$ minor quam $6\gamma\epsilon + 4\alpha d\zeta$; si quidem α habuerit valorem affirmativum, quoniam illam æquationem per α divisimus. Quod si vero α habeat valorem affirmativum, ob superiores æquationes $4\alpha\zeta$ major quam $\gamma\gamma$; $4\alpha d$ major quam 66 ; & $4d\zeta$ major quam $\epsilon\epsilon$; coëfficientes d & ζ erunt affirmativi.

110. Superficies ergo secundi ordinis in spatio finito continetur, si in ejus æquatione quatuor sequentes condiciones locum habeant; nempe si sit

$$4\alpha\zeta \text{ major quam } \gamma\gamma; 4\alpha d \text{ major quam } 66; 4d\zeta \text{ major quam } \epsilon\epsilon$$

&

$$\alpha\epsilon^2 + d\gamma^2 + \zeta^2 \text{ minor quam } 6\gamma\epsilon + 4\alpha d\zeta.$$

Hincque genus primum Superficierum secundi ordinis definimus, ad quod eæ species omnes pertinent, quæ non in infinito excurrunt, sed in spatio finito includuntur. Ad hoc ergo genus pertinet Globus, cujus æquatio est

$$zz + yy + xx = aa,$$

cum enim hic sit $\alpha = 1$, $d = 1$, $\zeta = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\epsilon = 0$, quatuor inventis conditionibus omnibus satisfit. Generalius vero hic pertinebit æquatio ista

$$azz + dyy + \zeta xx = a a$$

quæ si α , d , ζ , fuerint quantitates affirmativæ, semper est pro Superficie clausa, nisi unus duove coëfficientes evanescant.

111. Perfectis his quatuor conditionibus, quibus Superficies

Euleri *Introduçt. in Anal. infin. Tom. II.* B b b in

APPEND.

in spatium finitum redigitur; si proponatur æquatio secundi ordinis quæcunque determinata, statim dijudicari poterit utrum Superficies ea æquatione expressa habeat partes in infinitum extensas, an nullas. Quod si enim unica illarum quatuor conditionum desit, Superficies certo in infinitum extenditur. Hoc autem casu nonnullæ subdivisiones sunt faciendæ, quibus singularis varietas partibus in infinitum extensis inducitur. Prima subdivisio ergo constituatur, si fuerit

$$ae^2 + d^2y^2 + \zeta c^2 \text{ major quam } 6\gamma e + 4\alpha d\zeta$$

quo casu Superficies in infinitum extendetur, atque Superficiem conicam pro Asymtota habebit, uti jam ante ostendimus. Hicque casus e Diametro est oppositus præcedenti, quo tota Superficies in spatio finito continetur.

112. Præterea autem dantur casus quidam intermedii, quibus, etsi Superficies in infinitum abit, simili tamen modo inter duos præcedentes locum tenet quo Parabola inter Ellipsin & Hyperbolam continetur. Casus iste oritur si fuerit

$$ae^2 + d^2y^2 + \zeta c^2 = 6\gamma e + 4\alpha d\zeta,$$

eritque propterea

$$az = -6y - \gamma x + y\sqrt{66 - 4\alpha d} + x\sqrt{\gamma\gamma - 4\alpha\zeta}.$$

Habebit ergo æquatio Asymptotica

$$azz + 6yz + \gamma xz + dyy + exy + \zeta xx = 0,$$

duos Factores simplices, qui erunt vel reales, vel imaginarii, vel inter se æquales. Triplex ista diversitas ergo tria genera Superficierum in infinitum extensarum præbet, sicque omnino quinque genera Superficierum secundi ordinis sumus adepti, quæ nunc diligentius prosequemur.

113. Quia, mutando positionem ternorum Axiom, quibus Coordinatæ sunt parallelæ, æquatio generalis ad formam simpliciore

pliciolem reduci potest, ista reductione ita utamur, ut æ- CAP.V.
 quationem generalem pro Superficiebus secundi ordinis ad formam simplicissimam redigamus, quæ tamen omnes species æque ac generalis in se complectatur. Cum igitur æquatio generalis pro Superficiebus secundi ordinis sit

$$axz + \zeta yz + \gamma xz + \delta yy + \epsilon xy + \zeta xx + \eta z + \theta y + ix + u = 0,$$

quæramus æquationem inter alias ternas Coordinatas p , q & r , quæ quidem se mutuo in eodem puncto, quo ternæ priores se decussent. Ad hoc ex §. 92. statuatur

$$x = \frac{p(\cos.k.\cos.m - \sin.k.\sin.m.\cos.n) + q(\cos.k.\sin.m + \sin.k.\cos.m.\cos.n) - r.\sin.k.\sin.n}{\&}$$

$$y = \frac{-p(\sin.k.\cos.m + \cos.k.\sin.m.\cos.n) - q'\sin.k.\sin.m - \cos.k.\cos.m.\cos.n}{\text{atque}} - r.\cos.k.\sin.n$$

$$z = -p.\sin.m.\sin.n + q.\cos.m.\sin.n + r.\cos.n,$$

unde resultet ista æquatio

$$App + Bqq + Crr + Dpq + Epr + Fqr + Gp + Hq + Ir + K = 0.$$

114. Jam anguli illi arbitrarii k , m , & n ita definiri poterunt, ut tres coëfficientes D , E , & F evanescant. Quamquam enim calculus nimis fit prolixus, quam ut angulorum illorum determinatio actu ostendi possit; tamen si quis forte dubitet, an semper ista eliminatio ad valores reales angulorum illorum perducatur, is certe concedere debebit, duos saltem coëfficientes D & E nihilo æquales reddi posse. Hoc autem si fuerit effectum, positio tertiæ Axis, cui Ordinatæ r sunt parallelæ in plano ad Ordinatas p normali, facile ita mutari potest, ut etiam coëfficiens F evanescat. Statuatur enim $q = t.\sin.i + u.\cos.i$ & $r = t.\cos.i - u.\sin.i$, ita ut, loco termini qr , novus terminus tu ingrediatur, cujus coëfficiens ope anguli

APPEND guli *i* nihilo æqualis fieri poterit. Hoc igitur modo æquatio generalis pro Superficiebus secundi ordinis ad hanc formam perducetur

$$App + Bqq + Crr + Gp + Hq + Ir + K = 0.$$

115. Nunc præterea Coordinatæ *p, q, r* datis quantitibus ita augeri diminuive poterunt, ut coëfficientes *G, H & I* evanescant; quod fiet mutato tantum puncto illo, unde omnes Coordinatæ initium habent. Atque hoc modo omnes Superficies secundi ordinis in hac æquatione continebuntur

$$App + Bqq + Crr + K = 0,$$

ex qua intelligitur unumquodque trium planorum principalium per initium Coordinatarum ductorum Superficiem in duas partes similes & æquales bifecare. Omnis ergo Superficies secundi ordinis non solum unum habet planum diametræ, sed adeo tria, quæ se mutuo in eodem puncto normaliter interfecent; quod punctum propterea Centrum Superficiæ constituet, etiam si in nonnullis casibus hoc Centrum in infinitum distet. Simili scilicet modo, quo omnes Sectiones conicæ Centro dicuntur præditæ, etiam si in Parabola Centrum a Vertice infinite removeatur.

116. Perducta ergo æquatione, qua omnes Superficies secundi ordinis continentur, ad formam simplicissimam, primum harum Superficierum genus exhibebit ista æquatio

$$App + Bqq + Crr = aa,$$

si quidem omnes tres coëfficientes *A, B, & C* valores obtineant affirmativos. Superficies igitur ad hoc primum genus pertinentes non solum totæ in finito spatio includentur, sed omnes quoque Centrum habebunt, in quo tria plana diametralia se mutuo ad angulos rectos decussant. Sit *C* Centrum hujus figuræ, & *CA, CB, CD* Axes illi principales inter se normales,

T A B.
XXXVIII.
Fig. 143.

males, quibus Coordinatæ p, q, r sunt parallelæ, erunt tria CAP. V. plana diametralia $ABab; ADA;$ & BDb , quibus hoc Corpus in binas portiones similes æquales secabitur.

117. Ponatur $r = 0$; & æquatio $App + Bqq = aa$ exprimet naturam sectionis principalis $ABab$; quæ idcirco erit Ellipsis Centrum habens in C , cujus semiaxes erunt $CA = Ca = \frac{a}{\sqrt{A}}$; & $CB = Cb = \frac{a}{\sqrt{B}}$. Si ponatur $q = 0$, æquatio $App + Crr = aa$, erit pro sectione principali ADA , quæ pariter erit Ellipsis Centrum habens in C , cujus semiaxes erunt $CA = Ca = \frac{a}{\sqrt{A}}$, & $CD = \frac{a}{\sqrt{C}}$. Posito autem $p = 0$, prodibit pro tertia sectione principali BDb æquatio $Bqq + Crr = aa$, quæ etiam erit Ellipsis Centrum habens in C & semiaxes $CB = Cb = \frac{a}{\sqrt{B}}$, & $CD = \frac{a}{\sqrt{C}}$. Cognitis autem his tribus sectionibus principalibus, seu tantum earum semiaxibus $CA = \frac{a}{\sqrt{A}}$; $CB = \frac{a}{\sqrt{B}}$ & $CD = \frac{a}{\sqrt{C}}$, natura hujus Corporis determinatur & cognoscitur. Hinc primum istud Superficierum secundi ordinis genus *Elliptoides* appellari conveniet, quia tres ejus sectiones principales sunt Ellipses.

118. Sub hoc genere continentur tres species præ primis notatu dignæ. Prima est, si omnes tres Axes principales CA , CB , & CD inter se fuerint æquales, quo casu tres sectiones principales abibunt in Circulos, ipsumque Corpus in Globum, cujus æquatio, uti supra vidimus, erit

$$pp + qq + rr = aa.$$

Secunda species eos complectitur casus, quibus duo tantum Axes principales sunt inter se æquales. Sit nimirum $CD = CB$, seu $C = B$, atque sectio BDb fiet Circulus, ex æquatione autem $App + B(qq + rr) = aa$ intelligitur omnes sectiones huic parallelas pariter fore Circulos; unde hoc Corpus erit Sphæroides sive oblongum, si AC major sit quam

$$Bbb \quad 3 \quad BC;$$

APPEND. *BC*; sive compressum si *AC* sit minor quam *BC*. Tertia denique species ea complectitur Corpora, in quibus coëfficientes *A*, *B*, *C* sunt inæquales, quæ ideo nomen generale *Elliptoidis* retinebunt.

119. Sequentia genera Superficierum secundi ordinis hac continebuntur æquatione

$$App + Bqq + Crr = aa,$$

Ac primo quidem si nullus coëfficientium *A*, *B*, *C* prorsus desit; eorum autem, vel unus vel duo, valores habeant negativos. Sit unus tantum negativus, atque consideremus hanc æquationem

$$App + Bqq - Crr = aa,$$

T A B. in qua jam *A*, *B*, *C* numeros affirmativos denotare ponimus. Quod ad Centrum hujus Corporis & plana diametralia attinet, omnia eodem modo sunt comparata, ut ante. Patet igitur hujus Corporis sectionem principalem primam *ABab* esse Ellipsin, cujus semiaxis $AC = \frac{a}{\sqrt{A}}$, alterque $BC = \frac{a}{\sqrt{B}}$. Binæ reliquæ sectiones principales *Aq*, *BS* erunt Hyperbolæ Centrum in *C* & semiaxem conjugatum $= \frac{a}{\sqrt{C}}$ habentes.

120. Repræsentabit ergo hæc Superficies speciem infundibuli, sursum & deorsum secundum Hyperbolas divergens. Unde ista Superficies Asymptoton habebit Conum æquatione $App + Bqq - Crr = 0$ expressum, Verticem in Centro *C* habentem, & cujus latera sunt Asymptota Hyperbolarum. Stabit autem iste Conus Asymptotos intra Superficiem, eritque Conus rectus si fuerit $A = B$; scalenus vero si *A* non ipsi *B* æquabitur. Axis autem Coni erit recta *CD* normalis ad planum

planum ABa . Ceterum omnes sectiones Axi CD normales CAP. V.
erunt Ellipses similes Ellipsi $ABab$, sectiones vero plano $ABab$ normales omnes erunt Hyperbolæ: unde istas Superficies *elliptice hyperbolicas* vocari conveniet, Asymtoto suo conico circumscriptas. Hujus igitur Superficies nobis constituent genus secundum.

121. Species in hoc genere iterum tres notari poterunt: quarum prima erit, si $a = 0$, quo casu Ellipsis $ABab$ in punctum evanescit, & Hyperbolæ in lineas rectas abibunt: Superficies vero ipsa cum Asymtota sua penitus confundetur, ex quo hæc prima species complectetur omnes Conos, sive rectos sive scalenos; unde nova subdivisio fieri posset. Altera species erit si fiat $A = B$; quo casu Ellipsis $ABab$ in Circulum mutatur, & ipsa Superficies fiet rotunda seu tornata. Orietur scilicet hæc Superficies, si Hyperbola quæcunque circa Axem conjugatum convertatur. Tertia species ab ipso genere non discrepabit.

122. Tertium genus definiamus, si duo coëfficientes terminorum pp , qq , & rr fiant negativi, cujus ergo æquatio sit

$$App - Bqq - Crr = aa.$$

Posito ergo $r = 0$, erit prima sectio principalis Hyperbola TAB. XXXIX.
 $EAFeaf$ Centrum habens in C , cujus semiaxis transversus Fig. 145.
erit $= \frac{a}{\sqrt{A}}$, & semiaxis conjugatus $= \frac{a}{\sqrt{B}}$. Altera sectio principalis, posito $q = 0$, pariter erit Hyperbola AQ , aq , eodem semiaxe transverso prædita, sed cujus Axis semiconjugatus erit $= \frac{a}{\sqrt{C}}$: tertia sectio principalis fit imaginaria. Tota denique hæc Superficies intra Superficiem conicam Asymtotam erit sita: unde hoc genus vocari potest *hyperbolico-hyperbolicum* Cono Asymtoto inscriptum. Si fiat $B = C$, Superficies erit rotunda, orta ex conversione Hyperbolæ circa suum Axem transversum, quo casu species peculiaris constitui posset. Sin autem

APPEND. autem ponatur $a = 0$, oritur Superficies conica, quam jam, tanquam speciem generis præcedentis, sumus contemplati.

123. Ad sequentia genera cognoscenda ponamus unum coëfficientium A, B, C evanescere. Sit igitur $C = 0$, atque æquatio generalis §. 114. inventa erit

$$App + Bqq + Gp + Hq + Ir + K = 0,$$

in qua, augendo seu diminuendo Ordinatas p & q , termini Gp & Hq , non vero Ir tolli poterit. Relinquetur ergo terminus Ir in æquatione: ejus vero ope tolli poterit terminus ultimus K , unde ejusmodi æquationem habebimus

$$App + Bqq = ar,$$

cujus duo casus sunt perpendendi. Prior si uterque coëfficiens A & B fuerit affirmativus: posterior si alter sit negativus. Utroque autem casu Centrum Superficiæ in Axe CD erit situm sed ad distantiam infinitam remotum.

124. Sint primo ambo coëfficientes A & B affirmativi: quo casu constituatur genus quartum, æquatione hac contentum

$$App + Bqq = ar.$$

Γ A B. XXXIX. Fig. 146. Prima ergo sectio principalis oriunda si ponatur $r = 0$, in punctum evanescet; altera posito $q = 0$; & tertia posito $p = 0$, utraque erit Parabola. Nempe MAM & NAN . Cum igitur hujus Superficiæ omnes sectiones ad Axem AD normales sint Ellipses; sectiones vero per hunc ipsum Axem factæ Parabolæ, hujus generis Corpora *elliptico-parabolica* appellabimus. Cujus species sunt notandæ duæ: altera si $A = B$, quo casu oritur Corpus rotundum, *conoides parabolicum* vocatum: altera vero si $a = 0$, fitque $App + Bqq = bb$, quæ dat Cylindros, tam rectos si $A = B$, quam scalenos si A & B fuerint inæquales.

125. Quintum genus continebitur hac æquatione

CAP. V.

$$App - Bqq = ar,$$

cujus sectio principalis prima, facto $r = 0$, erunt duæ lineæ TAB. rectæ Ee , Ff se mutuo in puncto A decussantes. Omnes vero XXXIX. sectiones huic parallelæ erunt Hyperbolæ sua centra in Axæ Fig. 147. AD habentes, & intra Asymptotas rectas Ee & Ff constitutæ. Duo igitur plana, quæ plano ABC in Lineis Ee & Ff normaliter insistant, in infinitum cum Superficie proposita congruent, ideoque hæc Superficies pro Asymptoto habebit duo plana se mutuo decussantia, sectiones reliquæ principales in planis ACD & ABd factæ erunt Parabolæ: unde Superficies ad hoc genus pertinentes vocabimus *parabolico-hyperbolicas* duo plana pro Asymptotis habentes: cujus species, (si $a = 0$, ut sit $App - Bqq = bb$,) erit Cylindrus hyperbolicus, cujus omnes sectiones ad Axem AD normales erunt Hyperbolæ inter se æquales: si insuper sit $b = 0$, oriuntur duo illa ipsa plana asymptotica.

126. Sextum denique genus Superficierum secundi ordinis complectetur hæc æquatio

$$App = aq,$$

quæ præbet Cylindrum Parabolicum, cujus omnes sectiones Axi AD normales erunt Parabolæ similes & æquales, ita ut singularum Vertices in rectam AD incidant & Axes inter se sint paralleli. Ad hæc igitur sex genera omnes Superficies secundi ordinis reduci poterunt, ita ut nulla exhiberi possit, quæ non in uno horum generum contineatur. Ceterum, si in genere ultimo fiat $a = 0$, ut sit $App = bb$, hæc æquatio præbebit duo plana inter se parallela, quæ quasi speciem hujus generis constituent. Similitudo scilicet hic, uti in Lineis secundi ordinis obtinet, ubi vidimus duas rectas se decussantes Hyperbolæ speciem, duas autem Lineas parallelas Parabolæ speciem constituere.

APPEND.

127. Quanquam hæc sex genera ex æquatione simplicissima, ad quam Superficies secundi ordinis reducere licet, formavimus; tamen nunc facile erit, si æquatio quæcunque secundi gradus sit proposita, genus assignare ad quod Superficies pertineat. Quod si enim proposita fuerit hæc æquatio

$$axz + byz + \gamma xz + \delta yy + \epsilon xy + \zeta xx + \eta z + \theta y + \iota x + \kappa = 0,$$

judicium ex supremis terminis, in quibus duæ variabilium occurrunt dimensiones, petendum erit; spectari scilicet debent hi termini

$$axz + byz + \gamma xz + \delta yy + \epsilon xy + \zeta xx,$$

in quibus si fuerit

$4a\zeta$ major quam $\gamma\gamma$; $4ad$ major quam $\zeta\zeta$; $4d\zeta$ major quam $\epsilon\epsilon$

&

$$a\epsilon\epsilon + \delta\gamma\gamma + \zeta\zeta\zeta \text{ minor quam } \zeta\gamma\epsilon + 4ad\zeta,$$

Superficies erit clausa & ad genus primum, quod Elliptoides vocavimus, pertinebit.

128. Si una pluresve harum conditionum desint; neque tamen sit $a\epsilon\epsilon + \delta\gamma\gamma + \zeta\zeta\zeta = \zeta\gamma\epsilon + 4ad\zeta$, Superficies vel ad secundum vel ad tertium genus pertinebit, eritque corpus hyperbolicum Cono Asymptoto præditum, eique vel circumscriptum in genere secundo, vel inscriptum in genere tertio. At, si fuerit $a\epsilon\epsilon + \delta\gamma\gamma + \zeta\zeta\zeta = \zeta\gamma\epsilon + 4ad\zeta$, quo casu expressio

$$axz + byz + \gamma xz + \delta yy + \epsilon xy + \zeta xx,$$

resolvi poterit in duos Factores simplices, sive imaginarios sive reales. Casu priori Superficies pertinebit ad genus quartum, posteriori vero ad quintum. Quod si denique ista expressio duos habeat Factores æquales, seu sit quadratum, tum orietur genus sextum. Sicque statim facile dijudicari poterit, ad quodnam genus quævis æquatio proposita pertineat; difficilium

cilius tantum erit iudicium circa genus secundum & tertium: quæ CAP. V.
ambo ideo in unum constari possent.

129. Simili modo Superficies tertii & sequentium ordinum pertractari atque in genera dividi poterunt. Spectari scilicet tantum debebunt æquationis generalis termini suprèmi, & consequenter, pro Superficiibus tertii ordinis, ii in quibus Coordinatæ tres obtinent dimensiones, qui erunt

$$ax^3 + Cyz^2 + \gamma^2 z + dx^2 z + exz^2 + \zeta yz + \&c.$$

Primum igitur dispiciendum est, utrum hi termini conjunctim sumti, seu æquationis membrum supremum, resolvi possit in Factores simplices an non. Si resolutionem in Factores respuat, habebit Superficies Conum tertii ordinis pro Asymtoto. Quia autem natura hujus Coni exprimitur supremo membro nihilo æquali posito, plures hujusmodi Coni tertii ordinis dabuntur, ex quorum diversitate hinc plura Superficierum genera constituentur. Quamvis enim Coni secundi ordinis omnes ad unum genus referuntur, quia sunt vel recti vel scaleni; tamen in tertio ordine multo major varietas locum invenit.

130. Expositis ergo his generibus, considerandi sunt casus, quibus supremum membrum in Factores simplices resolvi potest, sive sint reales sive imaginarii. Habeat primum unum Factorem simplicem, qui erit realis: ex eo Superficies habebit Asymtotam planam. Alter Factor nihilo æqualis positus vel dabit æquationem possibilem vel non: si æquatio fuerit impossibilis, nisi omnes Coordinatæ evanescant, unica erit Asymtota plana: sin autem sit impossibilis, Superficies duas habebit Asymtotas, alteram planam, alteram Conum secundi ordinis. Quod si habeat tres Factores simplices, quia unus semper est realis, si bini reliqui sint vel imaginarii, vel reales, duo nova genera oriuntur. Denique si omnes tres Factores simplices sint reales, prout duo vel omnes sint inter se æquales, adhuc duo genera constitui poterunt. Nulla autem in hoc ordine datur Superficies, quæ non in infinitum extendatur.

CAPUT VI.

De interseccione duarum Superficierum.

APPEND. 131. **S**upra jam exposita est methodus investigandi naturam sectionis, quæ oritur si Superficies quæcunque a plano secatur. Cum enim Linea curva, quam sectio format, tota posita sit in eodem plano, quo sectio est facta, binas Coordinatas, quarum relatione natura hujusmodi Linearum curvarum exprimi solet, in eodem plano assumimus, ut hoc pacto cognitio ad receptam rationem reduceretur. At, si Superficies secans non fuerit plana, quoniam tum sectio non in eodem plano jacebit, ejus natura duabus Coordinatis comprehendi nequit: quapropter alio modo erit utendum, ad hujusmodi sectiones æquationibus includendas, quibus cujusque puncti positio vera indicetur.

132. Punctorum autem non in eodem plano sitorum loca definiri possunt, si tria plana inter se normalia in subsidium adhibeantur, atque pro quovis puncto ternæ illæ distantiae assignentur, quibus id a quolibet plano distat. Hinc tres variabiles requirentur ad naturam Lineæ curvæ non in eodem plano constitutæ exprimendam; ita ut, si una pro libitu definiatur, ex ea binæ reliquæ valores determinatos obtineant. Una igitur æquatio inter tres illas Coordinatas non sufficit ad hoc præstandum; quippe, quæ indolem universæ Superficiæ cujusdam indicaret; quocirca duabus opus erit æquationibus, quarum ope, si uni variabili datus valor tribuatur, simul binarum reliquarum valores determinentur.

133. Natura igitur cujusque Lineæ curvæ, quam in eodem plano constitutam esse non constat, commodissime exprimitur duabus æquationibus inter tres variabiles, puta x , y , z , quæ totidem Coordinatas inter se normales repræsentabunt. Ope duarum ergo hujusmodi æquationum binæ variabiles ex tertia determi-

determinari poterunt, æquabitur scilicet tam y quam z Functioni cuiuspiam ipsius x . Poterit etiam pro arbitrio una variabilium eliminari; unde tres æquationes duas tantum variables involventes formabuntur, un^a inter x & y , altera inter x & z , & tertia inter y & z . Harum trium vero æquationum quævis per binas reliquas sponte determinatur, ita ut, si habeantur æquationes inter x & y , & inter x & z , ex his tertia jam per eliminationem ipsius x inveniatur.

134. Sit ergo proposita Linea quæcunque curva non in eodem plano posita, cujus unum quoddam punctum sit M . Sumantur pro arbitrio tres Axes invicem normales AB , AC , & AD , quibus tria plana invicem normalia BAC , BAD & CAD determinantur. Ex puncto Curvæ M in planum BAC demittatur perpendicularum MQ , & ex puncto Q ad Axem AD ducatur normalis QP , erunt AP , PQ & QM tres illæ Coordinatæ, inter quas si dux dentur æquationes, natura Curvæ determinatur. Vocentur ergo $AP = x$, $PQ = y$, & $QM = z$; & ex duabus æquationibus inter x , y & z propositis, eliminando z , formetur æquatio duas tantum variables x & y continens, quæ determinabit positionem puncti Q in plano BAC ; atque singula puncta Q ex singulis M orta præbent Lineam curvam EQF , cujus natura æquatione illa inter x & y inventa exprimetur.

135. Hoc igitur modo ex duabus æquationibus inter tres Coordinatas propositis facile cognoscitur natura Curvæ EQF , quæ formatur demittendis ex singulis Curvæ indagandæ punctis M perpendicularis MQ in planum BAC . Curva autem hæc EQF vocatur *projectio* Curvæ GMH in planum BAC . Quemadmodum autem projectio in plano BAC facta invenitur eliminando variabilem z , ita ejusdem Curvæ projectio in plano BAD vel in plano CAD obtinebitur, si vel variabilis y eliminetur vel x . Una autem projectio EQF non sufficit ad Curvam GMH cognoscendam, sin autem pro singulis punctis Q cognita fuerint perpendiculara $QM = z$, ex projectione EQF ipsa Curva GMH facile construetur.

APPEND. Ad hoc igitur opus est, ut præter æquationem inter x & y , qua natura projectionis exprimitur, habeatur æquatio inter z & x , vel inter z & y , vel etiam inter tres z , x , y , ex qua longitudo perpendiculari $QM = z$ pro quovis puncto Q intellescat.

136. Cum autem æquatio inter z & x exprimat projectionem Curvæ GMH in plano BAD factam, æquatio autem inter z & y projectionem in plano CAD , atque æquatio inter tres variables z , y & x exhibeat Superficiem, in qua Curva GMH versetur: manifestum est primum ex duabus projectionibus ejusdem Curvæ GMH in duobus planis factis ipsam Curvam GMH cognosci. Tum vero perspicuum est, si detur Superficies, in qua Linea curva GMH contineatur, atque præterea ejus projectio in quodam plano, pariter Curvam illam fore cognitam. Erigantur enim ex singulis projectionis punctis rectæ normales QM , quarum intersectio cum Superficie definit Curvam GMH quæsitam.

137. His præmissis, quæ ad indolem cujusque Curvæ non in eodem plano constitutæ cognoscendam pertinent, non difficile erit intersectionem duarum quarumvis Superficierum definire. Quemadmodum enim intersectio duorum planorum est Linea recta, ita intersectio duarum Superficierum quarumvis erit Linea, sive recta sive curva; hæcque vel in eodem plano posita vel secus. Utcunque autem fuerit comparata, singula ejus puncta ad utramque Superficiem pertinebunt, ideoque in æquatione utriusque Superficie continebuntur. Quod si ergo ambæ Superficies exprimantur æquationibus inter ternas Coordinatas, quæ ad eadem tria plana principalia inter se normalia seu ad eisdem tres Axes inter se normales AB , AC & AD referantur, tum ambæ istæ æquationes conjunctæ naturam intersectionis expriment.

138. Propositis ergo duabus Superficiebus se mutuo secantibus, utriusque natura exprimi debet æquatione inter tres Coordinatas, quæ ad eisdem Axes principales referantur: sicque habebuntur duæ æquationes inter tres Coordinatas x ,

y &

y & z , ex quibus si una eliminetur, æquatio inter binas reliquas præbebit projectionem interfectionis in plano, quod his duabus Coordinatis constituitur, factæ. Hoc igitur modo quoque interfectio cujusque Superficiæ a plano factæ investigari poterit: cum enim æquatio generalis pro plano sit $\alpha z + \beta y + \gamma x = f$, si in æquatione Superficiæ loco z substituatur ejus valor ex illa æquatione oriundus, nempe $z = \frac{f - \beta y - \gamma x}{\alpha}$, prodibit æquatio pro projectione interfectionis in plano Coordinatarum x & y facta. Simul vero æquatio $z = \frac{f - \beta y - \gamma x}{\alpha}$ pro quovis puncto Q projectionis præbebit quantitatem perpendiculi QM ad ipsam interfectionem pertinentis.

139. Quod si eveniat ut æquatio pro projectione fiat impossibilis, uti si inveniretur $xx + yy + aa = 0$; tum hoc erit indicium, ambas Superficies se mutuo nusquam interfecare. Sin autem æquatio projectionis in unicum punctum deducat, seu, si projectio in punctum evanescat, tum ipsa quoque interfectio erit punctum, ideoque ambæ Superficies se mutuo in puncto contingent; qui contactus itaque ex æquatione cognosci poterit. Datur autem præterea contactus linearis, quando duæ Superficies se in infinitis punctis contingunt; Lineaque contactus vel erit recta vel curva. Recta scilicet erit, si planum tangat Cylindrum vel Conum: Conus rectus autem a Globo intus tangetur per Peripheriam Circuli. Qui contactus ex æquatione cognoscentur, si pro projectione ejusmodi prodierit æquatio, quæ duas habeat radices æquales, propterea quod contactus nil aliud est, nisi concursus duarum interfectionum.

140. Ad hæc clarius explicanda ponamus Globum secari a plano quocunque. Sumamus æquationem ad Centrum Globi accommodatam $zz + yy + xx = aa$, pro plano autem utcumque posito hæc habebitur æquatio

$$\alpha z + \beta y + \gamma x = f,$$

unde

APPEND. unde, cum sit $z = \frac{f - \zeta y - \gamma x}{\alpha}$, sequens oriatur æquatio inter x & y pro projectione

$$0 = ff - \alpha^2 a^2 - 2\zeta fy - 2\gamma fx + (\alpha^2 + \zeta^2)y^2 + 2\zeta\gamma xy + (\alpha^2 + \gamma^2)x^2,$$

quam patet esse Ellipsin, si quidem æquatio fuerit realis; sin autem fuerit imaginaria Globus a plano nusquam tangetur: at, si Ellipsis in punctum evanescat, planum & Globus se mutuo tangunt. Qui casus ut eruatur, quæretur

$$y = \frac{\zeta f - \zeta \gamma x \pm \alpha \sqrt{(\alpha^2 + \zeta^2) - \frac{f^2 + 2\gamma fx - (\alpha^2 + \zeta^2 + \gamma^2)xx}{\alpha^2 + \zeta^2}}}{\alpha^2 + \zeta^2},$$

ubi si f ejusmodi habuerit valorem, ut quantitas radicalis nunquam fieri possit realis, nullus dabitur contactus, neque intersectio.

141. Ponamus esse $f = a \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}$
eritque

$$y = \frac{\zeta f - \zeta \gamma x \pm \alpha x \sqrt{-(\alpha^2 + \zeta^2 + \gamma^2) \mp \alpha \gamma a \sqrt{-1}}}{\alpha^2 + \zeta^2},$$

cui æquationi realiter satisfieri nequit, nisi sit

$$x = \frac{\gamma a}{\sqrt{(\alpha^2 + \zeta^2 + \gamma^2)}}, \quad \& \quad y = \frac{\zeta a}{\sqrt{(\alpha^2 + \zeta^2 + \gamma^2)}}.$$

Quare, si fuerit $f = a \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}$, planum, quod exprimitur æquatione $\alpha z + \beta y + \gamma x = f$, Globum tanget; punctumque contactus habebitur, si capiatur

$$x = \frac{\gamma a}{\sqrt{(\alpha^2 + \zeta^2 + \gamma^2)}}, \quad y = \frac{\zeta a}{\sqrt{(\alpha^2 + \zeta^2 + \gamma^2)}}, \quad \& \quad z = \frac{\alpha a}{\sqrt{(\alpha^2 + \zeta^2 + \gamma^2)}}$$

quorum valorum veritas per Geometriam elementarem, ubi contactus Sphæræ a plano docetur, comprobari potest.

142. Hinc igitur generalis regula deducitur, cujus ope cognosci potest, utrum Superficies quæcunque a plano aliave Superficie

Superficie tangatur an non? Eliminata enim ex ambabus æquationibus una variabili, videndum est an æquatio resultans resolvi possit in Factores simplices an minus. Si enim habeat duos Factores simplices imaginarios, dabitur contactus in puncto, quod innotescet ponendo utrumque Factorem = 0. Sin autem habeat duos Factores simplices reales eosque inter se æquales, Superficies se mutuo secundum Lineam rectam tangent. Quod si vero illa æquatio habeat duos Factores non simplices æquales; seu, si fuerit per quadratum divisibilis, tum ejus radix nihilo æqualis posita exhibebit projectionem illius Lineæ, quæ ex contactu oritur. Hinc quoque patet si eadem illa æquatio quatuor habuerit Factores imaginarios, tum Superficies se mutuo in duobus punctis contingere.

143. Quo hæc plenius explicentur, investigemus contactum Coni & Globi cujus Centrum in Axe Coni sit positum. Æquatio pro Globo est $zz + yy + xx = aa$, pro Cono autem $(f - z)^2 = mxx + nyy$, posito quod Vertex Coni intervallo f a Centro Globi sit remotus. Eliminemus hinc variabilem y , eritque

$$(f - z)^2 = naa - nzz + (m - n)xx,$$

pro projectione intersectionis in plano Coordinatarum x & z . Sit primum Conus rectus, seu $m = n$, eritque

$$z = \frac{f \pm \sqrt{(n(1+n)aa - nff)}}{1+n}.$$

Quare, si fuerit $f = a\sqrt{1+n}$, erit dupliciter $z = \frac{a}{\sqrt{1+n}}$, ideoque contactus erit linearis: scilicet per Circulum, cujus projectio in plano per Axem transeunte est Linea recta ad Axem normalis.

144. Pro Cono autem scaleno, ubi m , & n sunt inæquales, æquatio inventa videtur semper dare intersectionem, cum ta-

$$\left. \begin{aligned} & \frac{aa - ff + m(aa + ff) - (1 + m)(1 + n)yy \pm}{(1 + m)^2} \\ & \frac{2f}{(1 + m)^2} \sqrt{(m(1 + m)aa - mff + (n - m)(1 + m)yy)} \end{aligned} \right\} = x^2.$$

146. Ut igitur æquatio inventa habeat Factores, oportet esse vel $ff = (1 + n)aa$ vel $ff = (1 + m)aa$. Priori casu fit

$$yy = \frac{naa - (1 + m)xx}{1 + n} \pm \frac{2fx\sqrt{(m - n)}}{(1 + n)\sqrt{(1 + n)}},$$

unde, si fit m minor quam n , necesse est ut sit $x = 0$ & $y = \pm a\sqrt{\frac{n}{1 + n}}$, & $z = \frac{a}{\sqrt{(1 + n)}}$. Dantur ergo duo puncta contactus ab Axe Coni utrinque æqualiter distantia. Sin autem fuerit m major quam n , sumi debet altera æquatio

$$xx = \frac{maa - (1 + n)yy}{1 + m} \pm \frac{2fy\sqrt{(n - m)}}{(1 + m)\sqrt{(1 + m)}},$$

quæ realis esse nequit, nisi fit $y = 0$; quo casu fit $x = \pm a\sqrt{\frac{m}{1 + m}}$; & $z = \frac{a}{\sqrt{(1 + m)}}$. Hocque ergo casu dabuntur duo alia contactus puncta; contactus enim existet in ea Coni parte, ubi est arcuissimus. Simili itaque modo in singulis casibus contactus judicari debet.

147. Modus autem longe facilior determinandi plana tangentia quarumcunque Superficierum deduci potest ex methodo inveniendi tangentes Linearum curvarum supra tradita. Sit natura Superficiæ, cujus plana tangentia quarimus, expressa æquatione inter tres Coordinatas $AP = x$, $PQ = y$, & $QM = z$, ex qua definiri oportet positionem plani Superficiem in puncto M tangentis. Primum igitur consideramus si Superficiæ secetur plano quocumque per punctum M transeunte, sectionis inde ortæ tangentem in puncto M sitam fore in plano tangente. Quare, si duarum hujusmodi sectionum tangentes

TAB.
XL.
Fig. 149.

APPEND. in puncto M invenerimus, planum quod his duabus rectis tangentibus definitur, ipsam Superficiem in puncto M contingere debere.

148. Secetur ergo primum Superficies plano ad planum APQ normali, secundum rectam QS parallelam Axi AP . Tum simili modo quia sectio per punctum M pariter normalis ad planum APQ , sed secundum rectam QP Axi AP normalem; seu, prior sectio sit normalis ad Axem AB , posterior vero ad Axem AP . Sit Curva EM prior sectio, cujus quaeratur tangens MS rectae QS in puncto S occurrens, ita ut sit QS subtangens. Sectio posterior sit Linea curva FM , cujus tangens sit recta MT & subtangens QT . Quibus inventis planum SMT Superficiem in puncto M tanget. Ducta ergo ST dabit intersectionem plani tangentis cum plano APQ ; atque, si ex Q ad ST normalis ducatur QR , tum erit QR ad QS uti sinus totus ad tangentem anguli MRQ , quo planum tangens ad planum APQ inclinatur.

149. Ponamus per methodum Tangentium supra traditam inventas esse subtangentes $QS = s$ & $QT = t$; erit $PT = t - y$, & $PX = s - \frac{sy}{t}$; unde fit $AX = x + \frac{sy}{t} - s$. Innotescit ergo hinc punctum X , in quo recta ST Axem AP trajicit: &, qua angulus $AXS = TSQ$, erit hujus anguli tangens $= \frac{t}{s}$, ex quo positio intersectionis plani tangentis cum plano APQ cognoscitur. Deinde, ob $ST = \sqrt{(ss + tt)}$, erit $QR = \frac{st}{\sqrt{(ss + tt)}}$, per quam si dividatur QM prodibit tangens anguli inclinationis $MRQ = \frac{2\sqrt{(ss + tt)}}{st}$. Si porro ad MR normalis ducatur MN , erit hæc cum ad planum tangens, tum ad ipsam Superficiem in puncto M normalis. Ejus ergo positio colligitur ex $QN = \frac{22\sqrt{(ss + tt)}}{st}$. Demittatur ex N ad Axem AP perpendicularis

dicularis NV , ob angulum $QNV = QST$, erit $PV =$ CAP. VI.
 $\frac{z^2}{t} = QW$ & $NW = \frac{z^2}{t}$. Quare, si hoc modo definiatur positio puncti N in plano APQ , recta NM erit normalis in Superficiem.

150. Quemadmodum intersectio duarum Superficierum per projectiones indagari debet, supra jam est ostensum. Inquiramus autem cujus ordinis futura sit projectio, pro ordine, ad quem Superficies referuntur. Ac primo quidem duæ Superficies primi ordinis, seu planæ, pro intersectione ejusque projectione dant Lineam primi ordinis. Deinde quoque vidimus hanc projectionem ultra secundum ordinem assurgere non posse, si altera Superficies fuerit primi ordinis altera secundi. Simili modo manifestum est, si altera Superficies fuerit tertii ordinis altera primi, projectionem tertium gradum non esse transgressuram & ita porro. Sin autem duæ Lineæ secundi ordinis se mutuo secent, projectio intersectionis erit vel quarti ordinis vel inferioris; atque generaliter si altera Superficies sit ordinis m , altera ordinis n , intersectionis projectio ad altiore ordinem, quam qui numero $m \cdot n$ indicatur, nunquam referetur.

151. Quando neutra Superficierum se mutuo secantium est plana, plerumque sectio earum mutua est Linea curva non in eodem plano constituta. Hoc tamen non obstante fieri potest, ut tota sectio in eodem plano sit posita; id quod eveniet si ambæ Superficierum æquationes junctim sumptæ hujusmodi æquationem $ax + by + \gamma x = f$ in se complectantur. Quod utrum eveniat, ex duabus æquationibus propositis definiantur binæ variables z & y per tertiam x , fiatque $z = P$ & $y = Q$, existentibus P & Q Functionibus ipsius x . Tum dispiciatur, an ejusmodi numerus n detur, ut in $P + nQ$ omnes potestates ipsius x se mutuo tollant, præter infimam x & terminos constantes. Quod si eveniat, fueritque $P + nQ = mx + k$, sectio erit in eodem plano, hocque planum indicabitur æquatione $z + ny = mx + k$.

APPEND. 152. Sint, verbi gratia, pro Cono recto $zz = xx + yy$, altera pro Superficie secundi generis elliptico-hyperbolica $zz = xx + 2yy - 2ax - aa$. Ex quibus cum sit $xx + 2yy - 2ax - aa = xx + yy$, erit $y = \sqrt{2ax + aa}$ & $z = x + a$, quæ ultima æquatio jam indicat totam sectionem in eodem plano esse sitam, cujus positio determinetur æquatione $z = x + a$. Hac igitur ratione plurimæ quæstiones ad naturam Superficierum pertinentes resolvi poterunt. Quæ autem methodum hic expositam transgrediuntur, ex Analysin infinitorum requirunt, ad quam scientiam hæc, quæ his libris tradita sunt, viam præparant.

F I N I S.

Fig. 1.

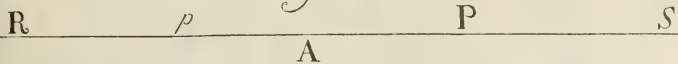


Fig. 2.

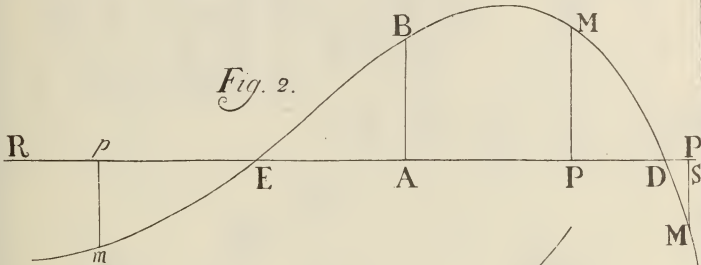


Fig. 3.

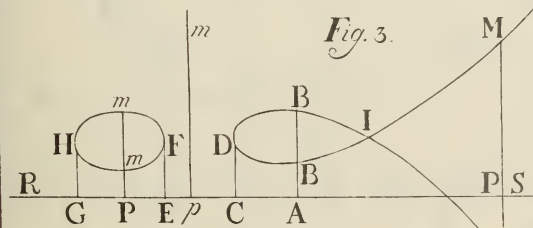


Fig. 4.

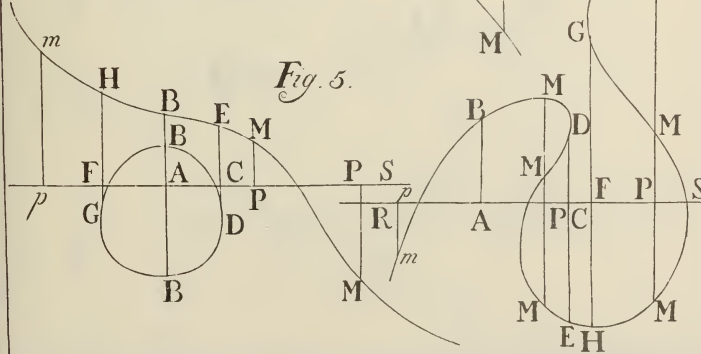
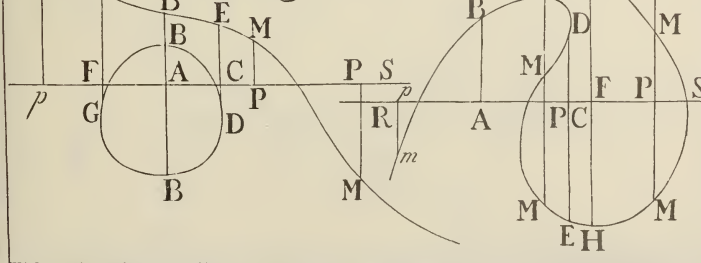


Fig. 5.



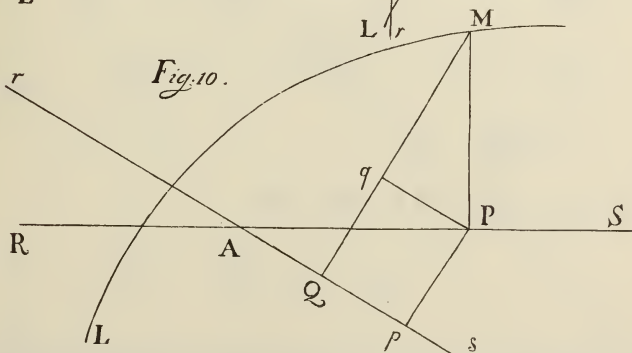
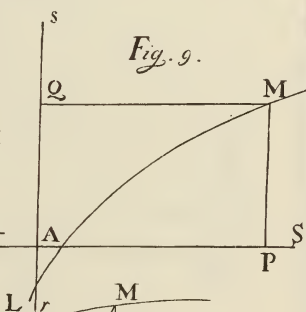
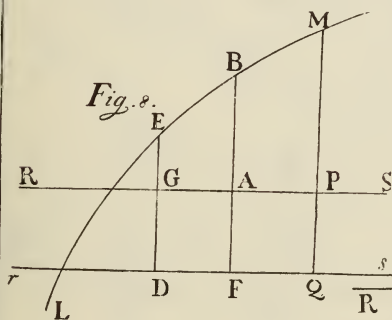
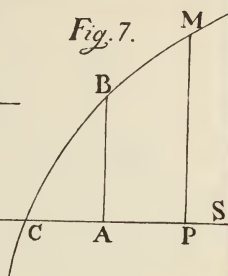
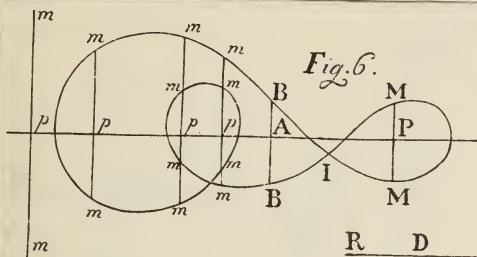


Fig. 11.

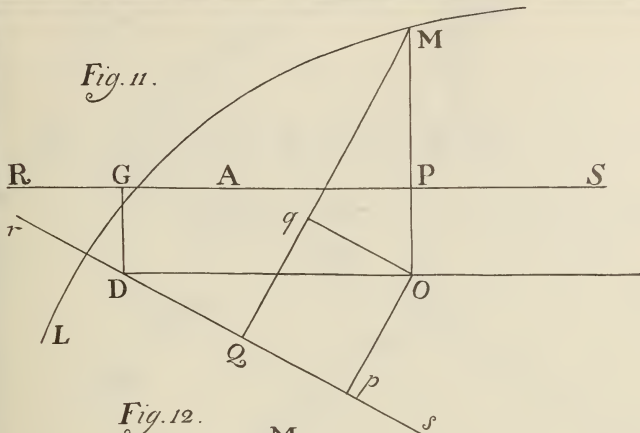


Fig. 12.

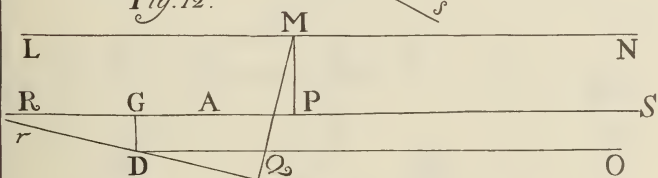


Fig. 14.

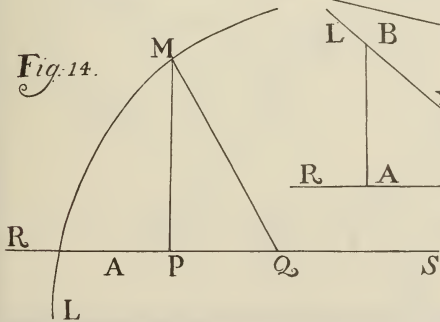


Fig. 13.

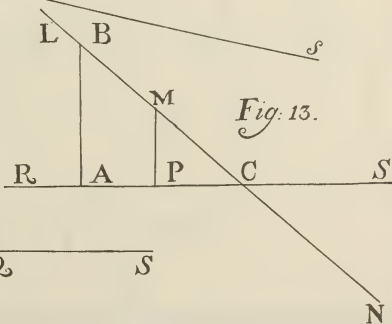


Fig 15

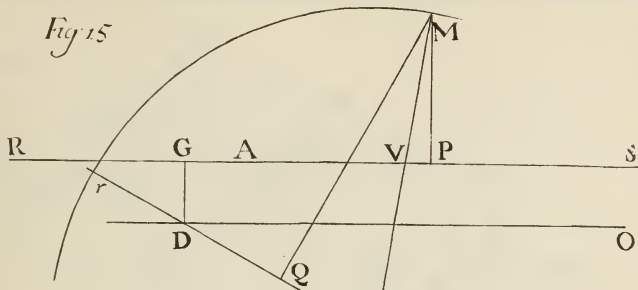


Fig 16

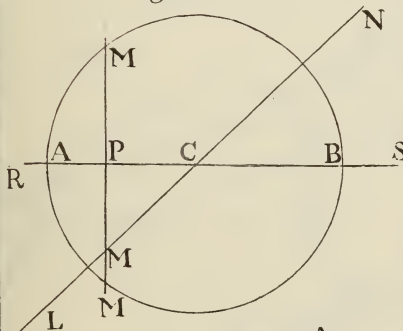


Fig.17.

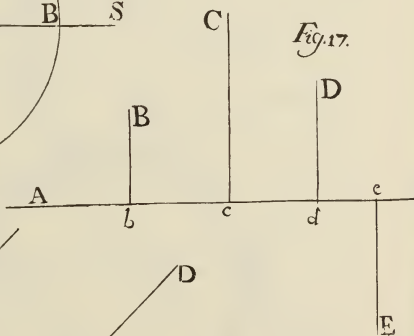
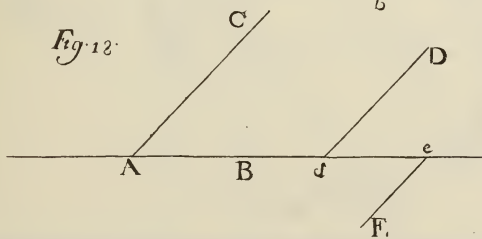
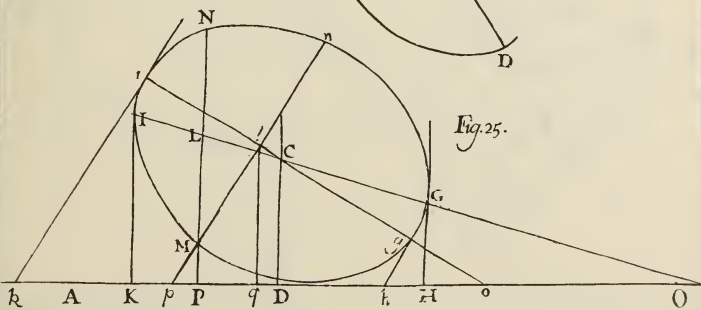
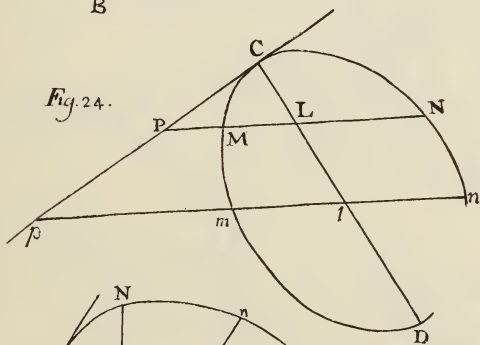
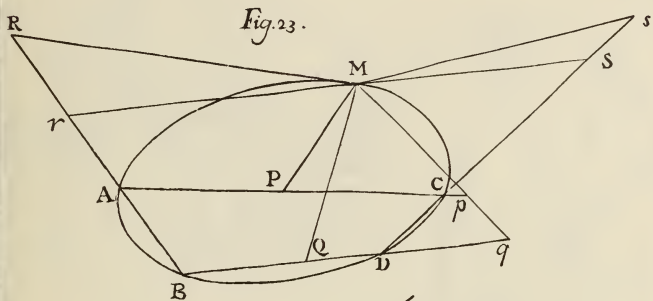


Fig.12.





T A B. VII.

Fig. 26.

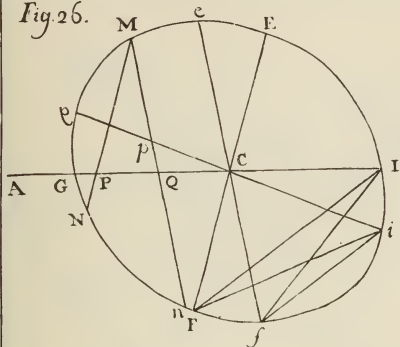


Fig. 27.

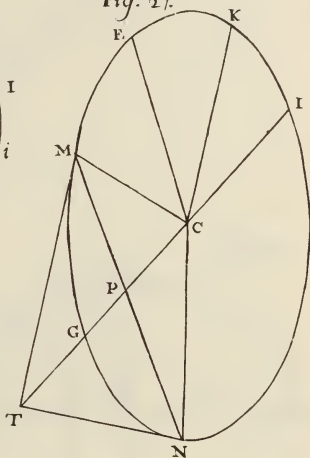


Fig. 28.

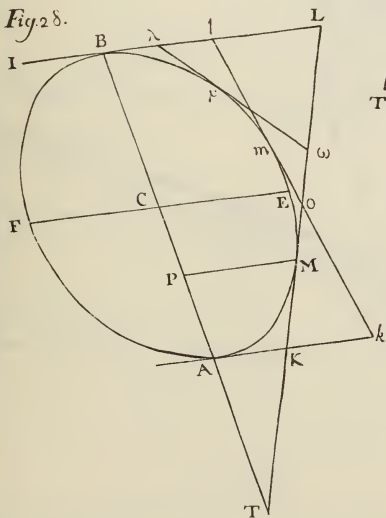
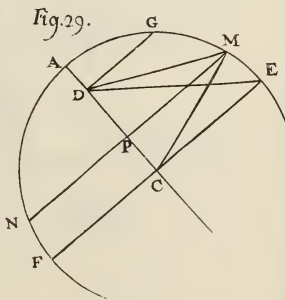


Fig. 29.



TAB X

Fig. 35

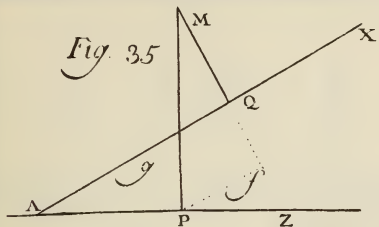


Fig. 36

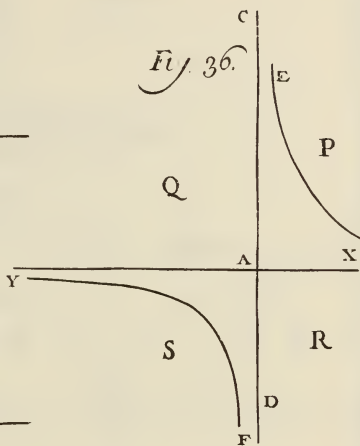


Fig. 37

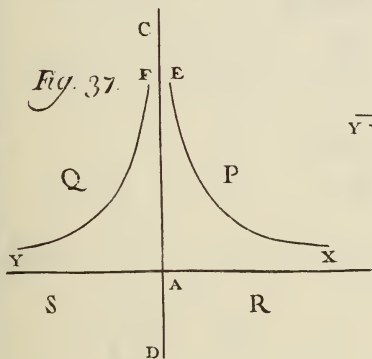


Fig. 38

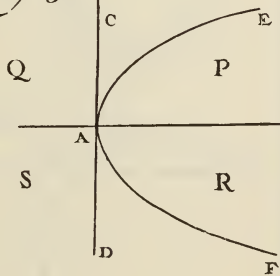
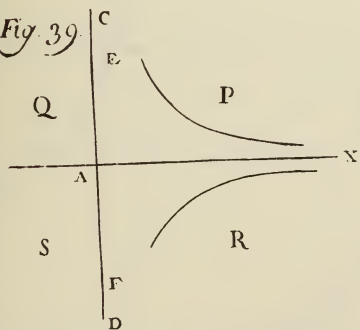


Fig. 39



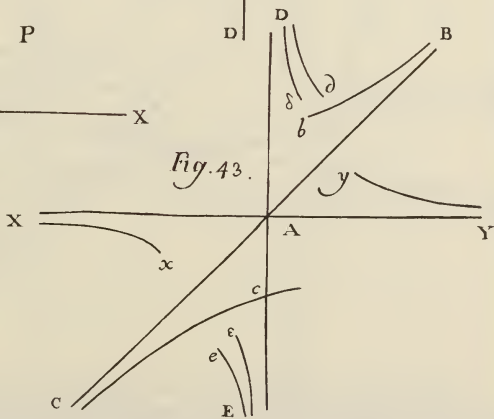
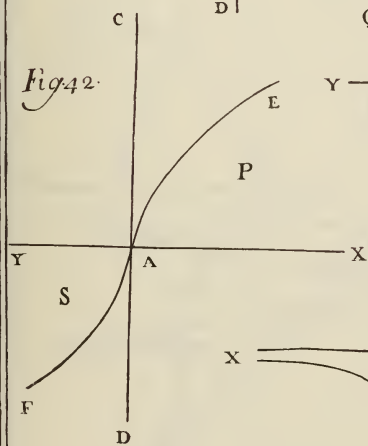
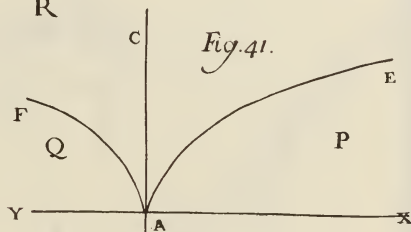
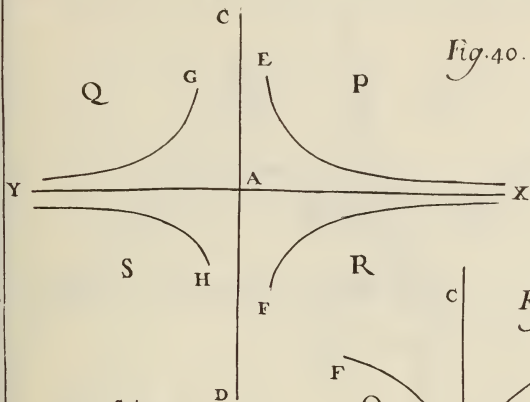


Fig.

44.

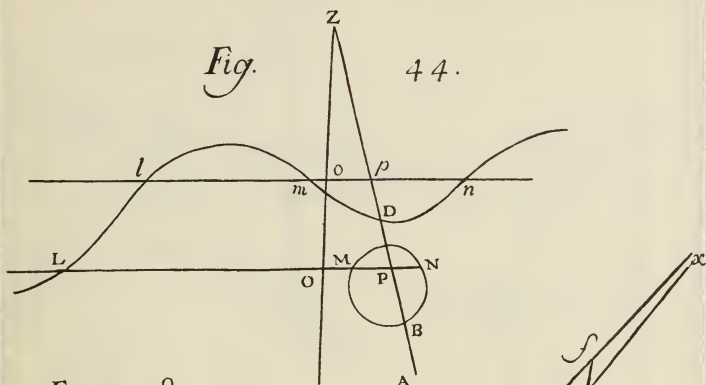


Fig. 45.

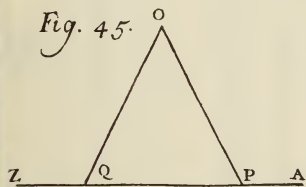


Fig. 46.

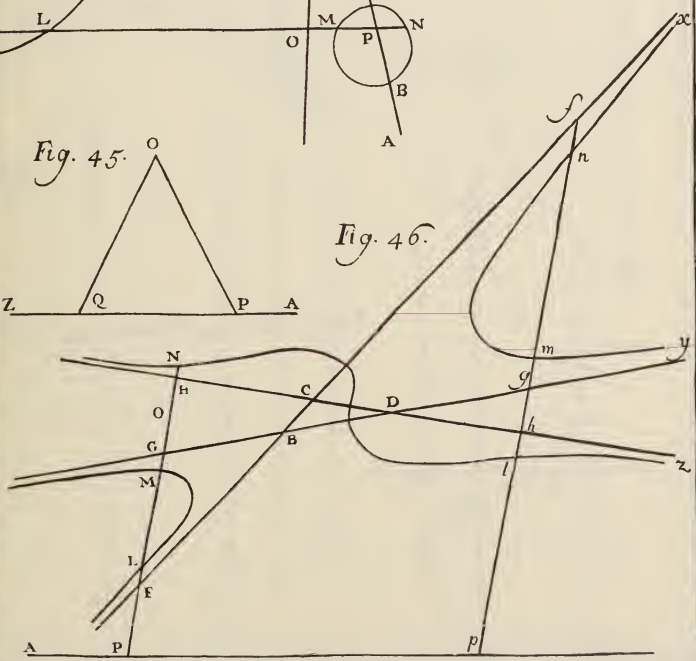


Fig. 47.

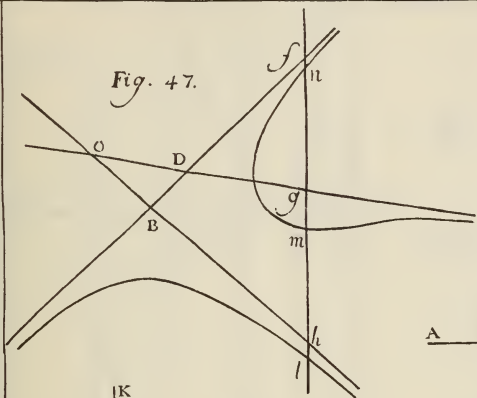


Fig. 48.

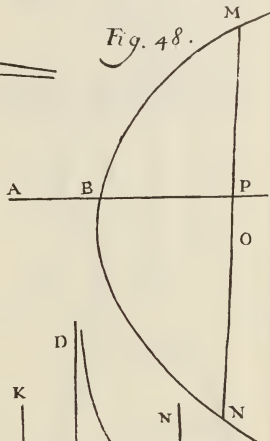


Fig. 49.

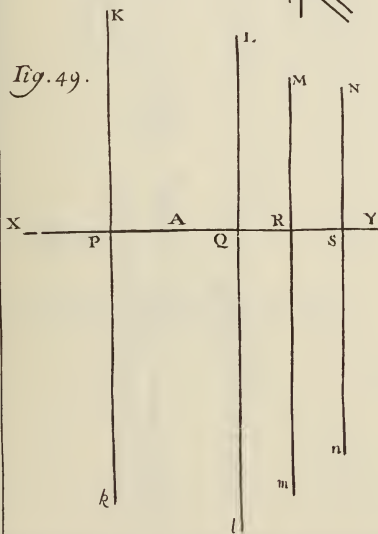
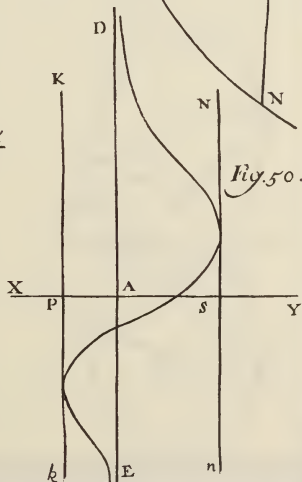


Fig. 50.



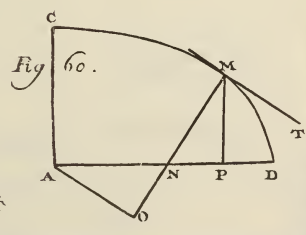
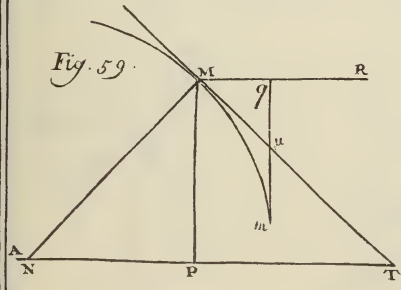
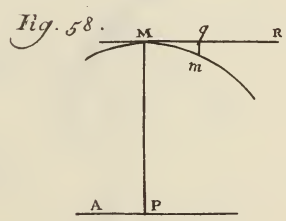
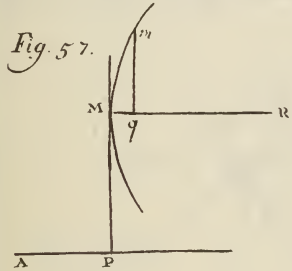
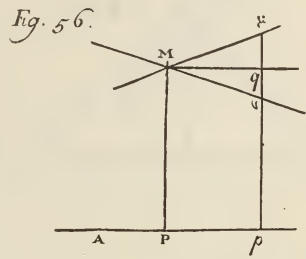
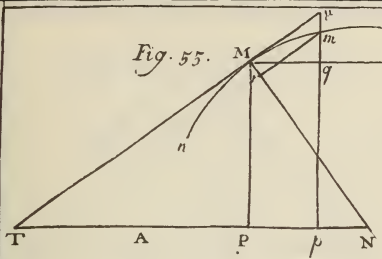


Fig. 61.

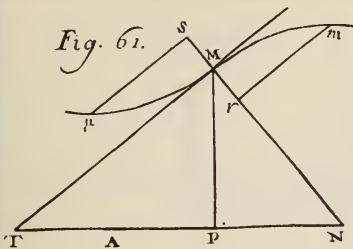


Fig. 62.

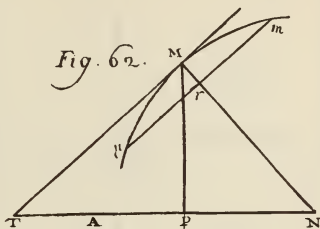


Fig. 63.

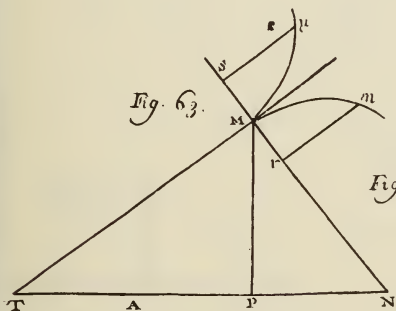


Fig. 64.

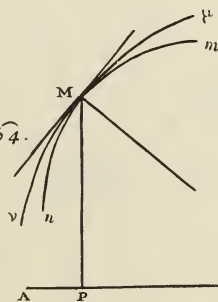


Fig. 65.

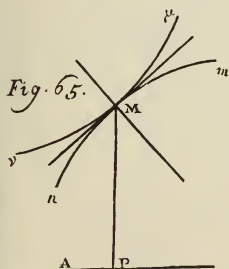


Fig. 66.

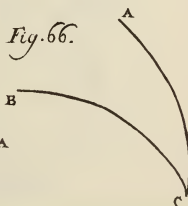
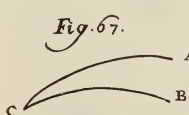


Fig. 67.



TAB. XVII

Fig. 68.

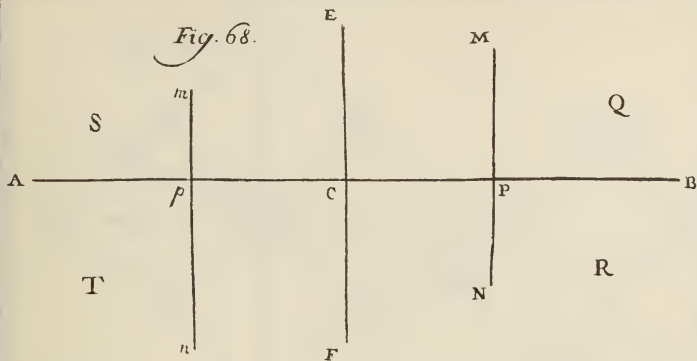


Fig. 70.

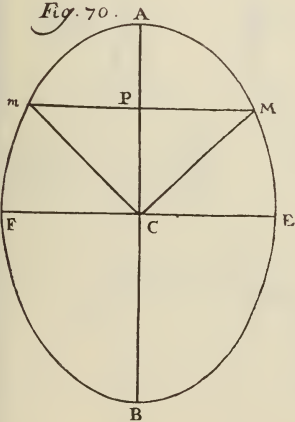


Fig.

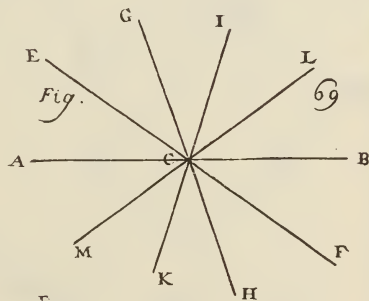


Fig. 71.

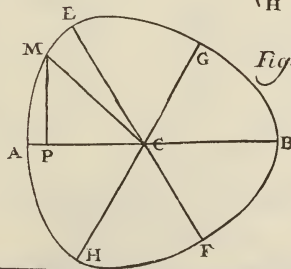


Fig. 72.

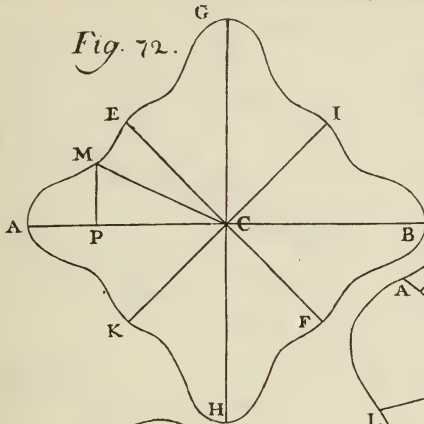


Fig. 73.

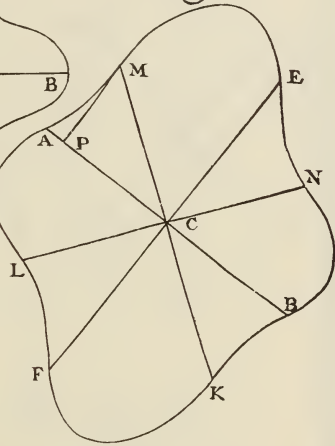


Fig. 74.

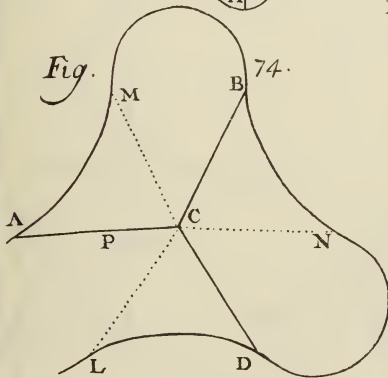
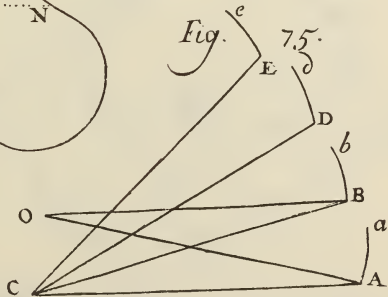


Fig. 75.



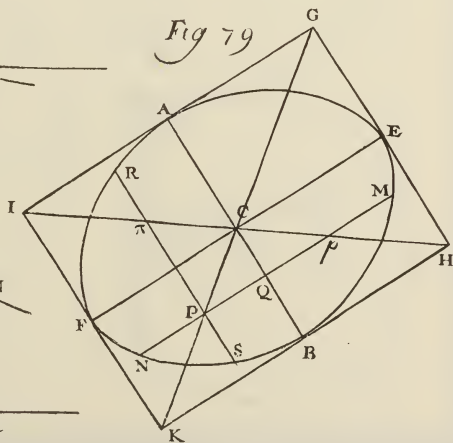
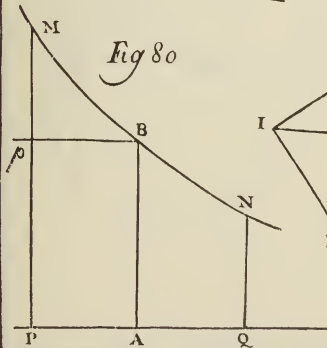
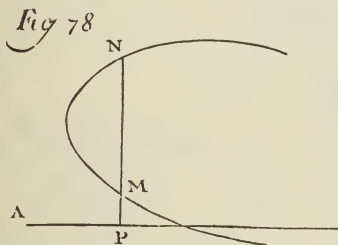
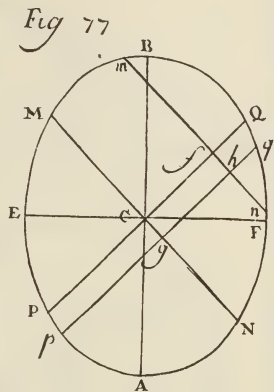
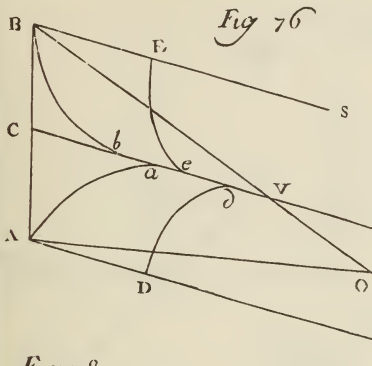


Fig. 86.

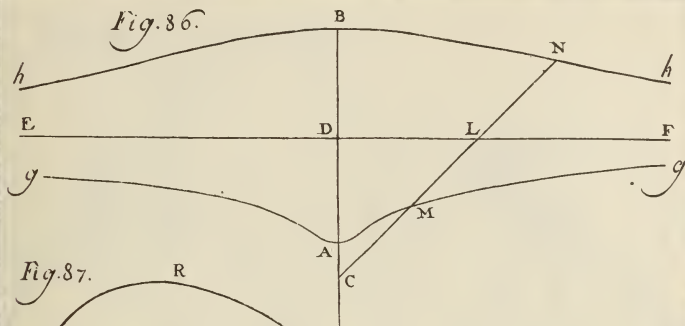


Fig. 87.

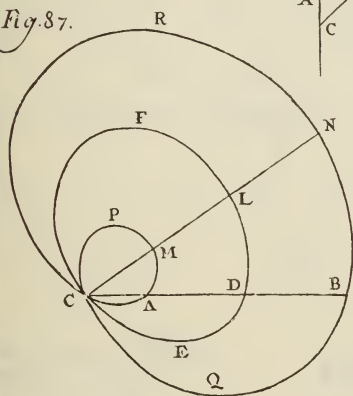


Fig. 88.

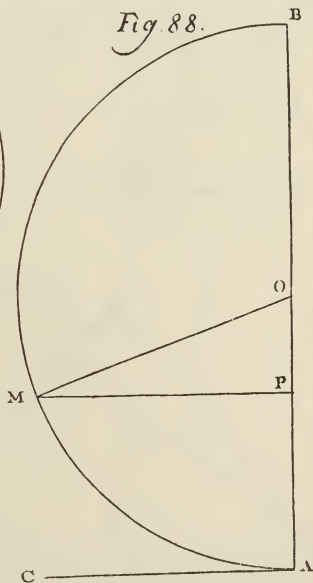
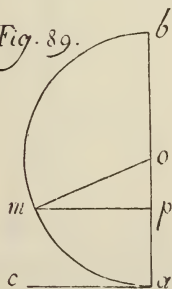


Fig. 89.



TAB. X XII.

Fig. 90.

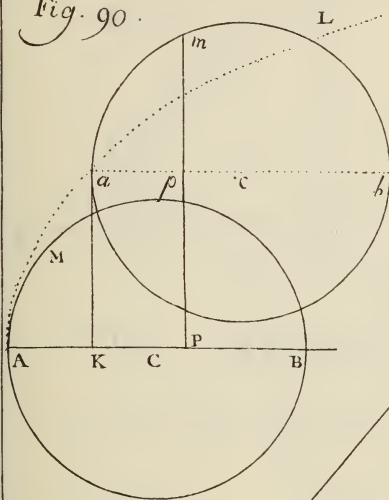


Fig. 91.

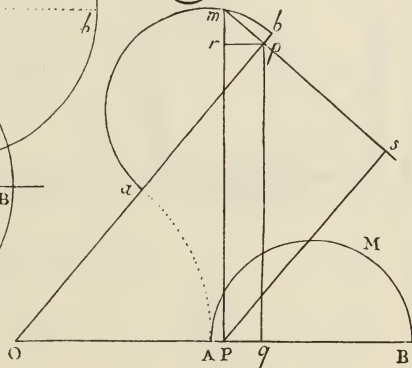


Fig. 92.

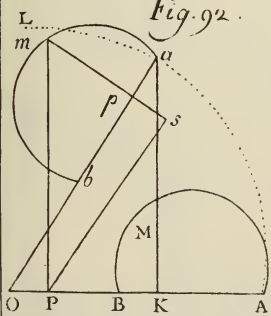
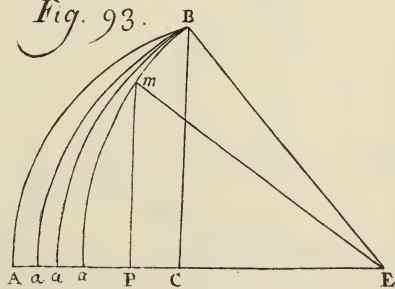


Fig. 93.



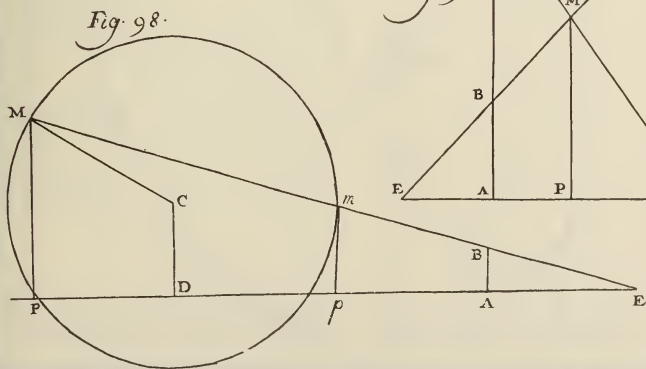
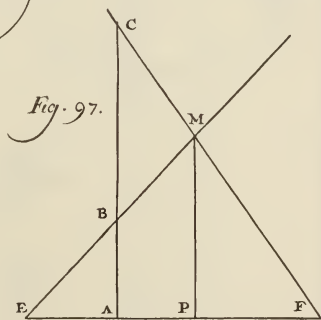
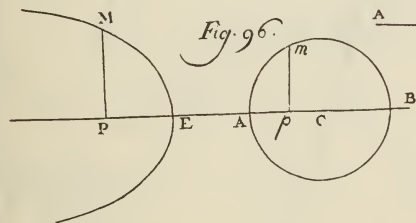
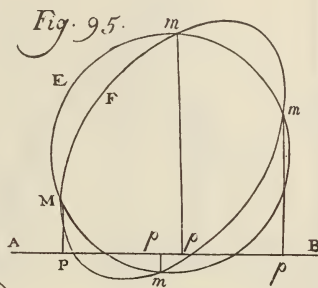
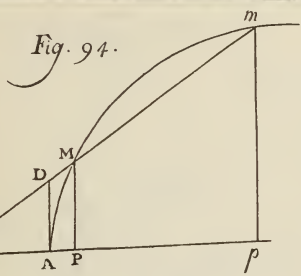


Fig. 99

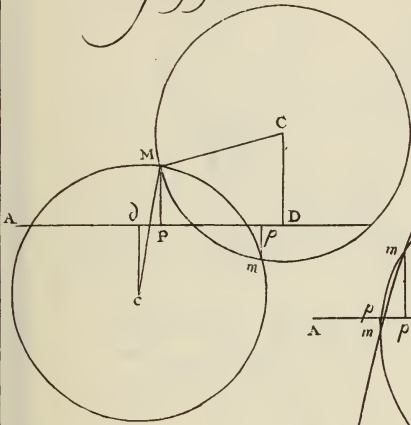


Fig. 100.

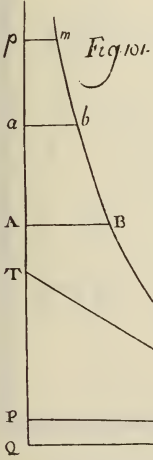
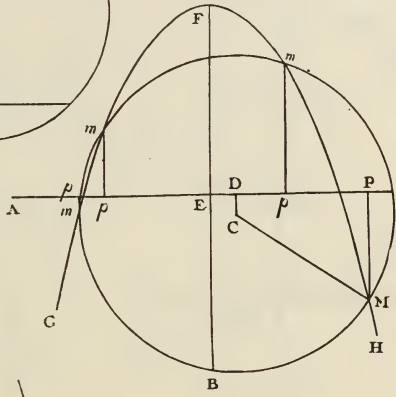


Fig. 102.

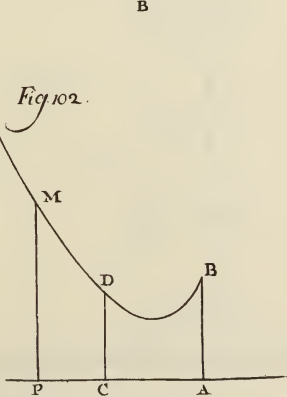


Fig. 106.

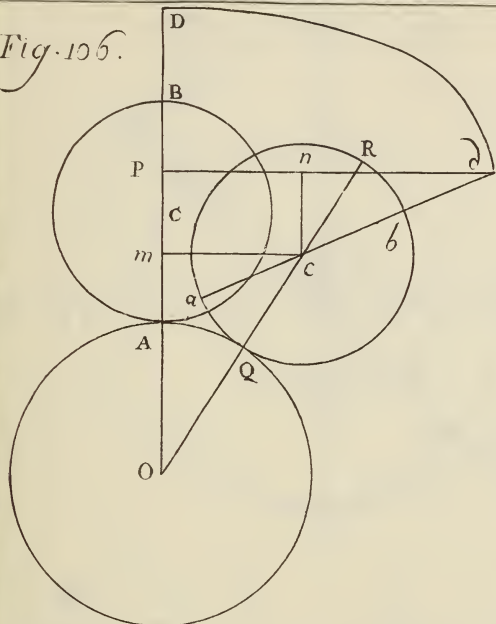


Fig. 107.

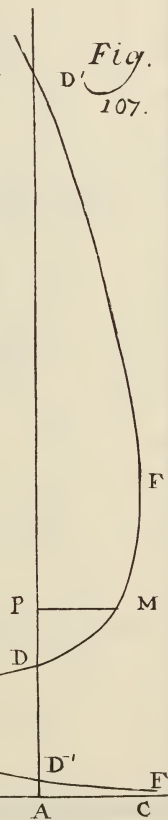


Fig. 108.

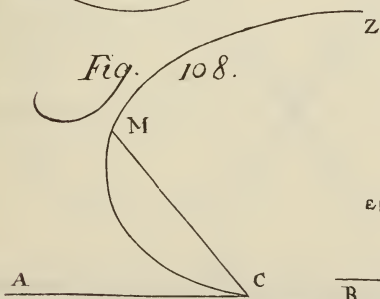


Fig.

109.

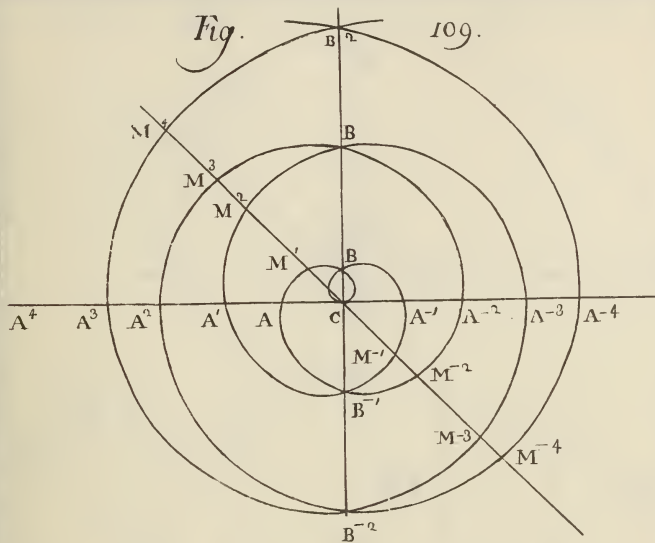
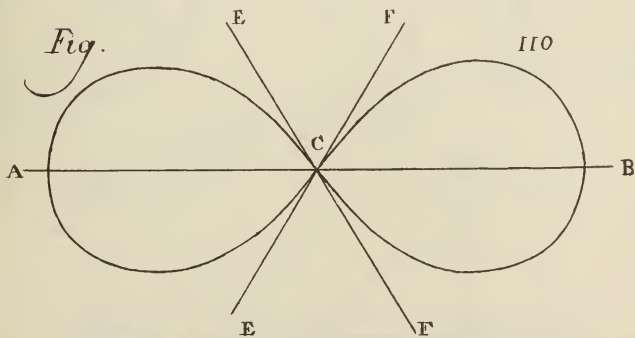
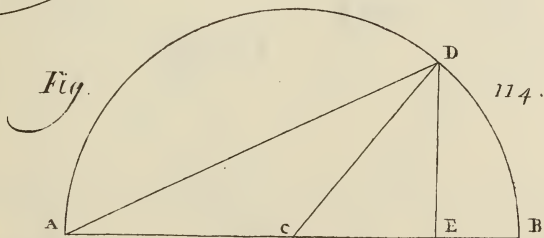
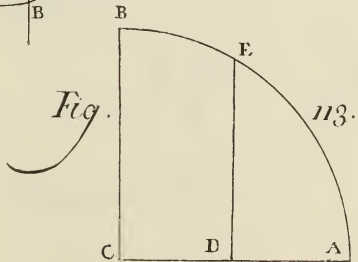
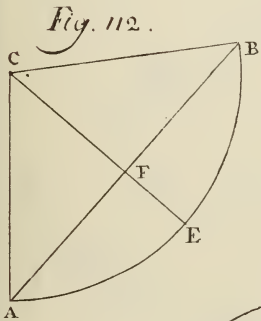
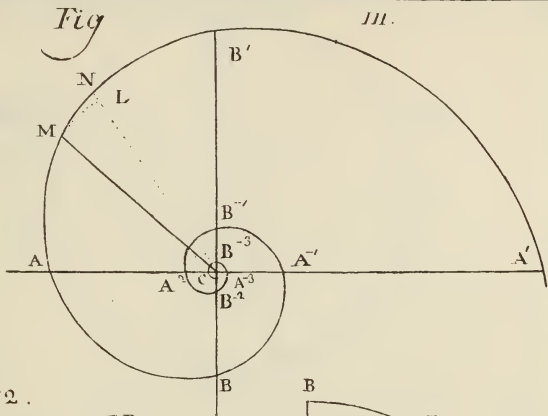


Fig.

110





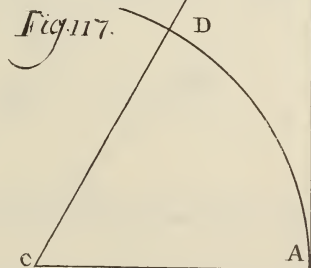
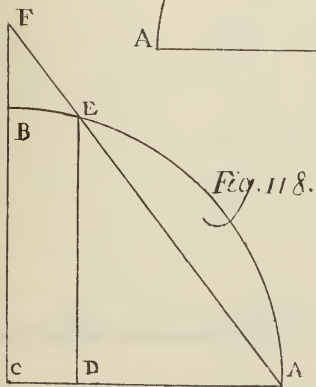
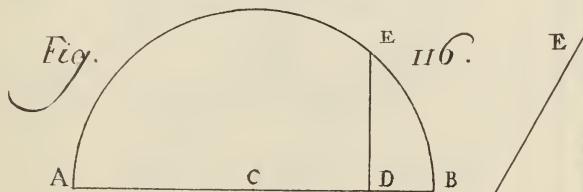
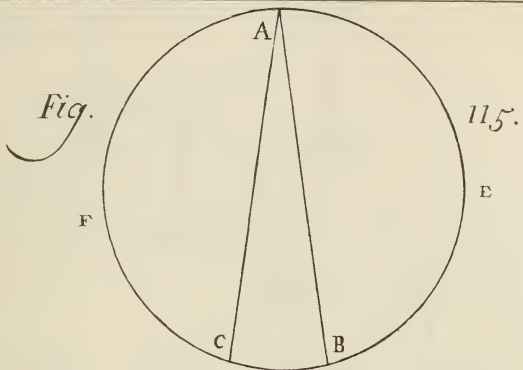


Fig. 119.

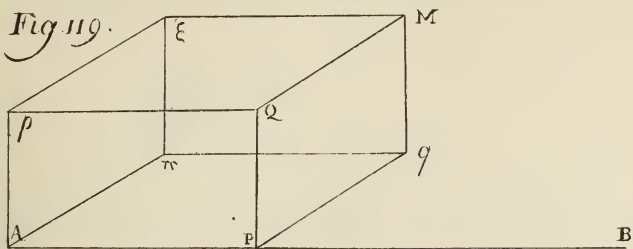


Fig. 120.

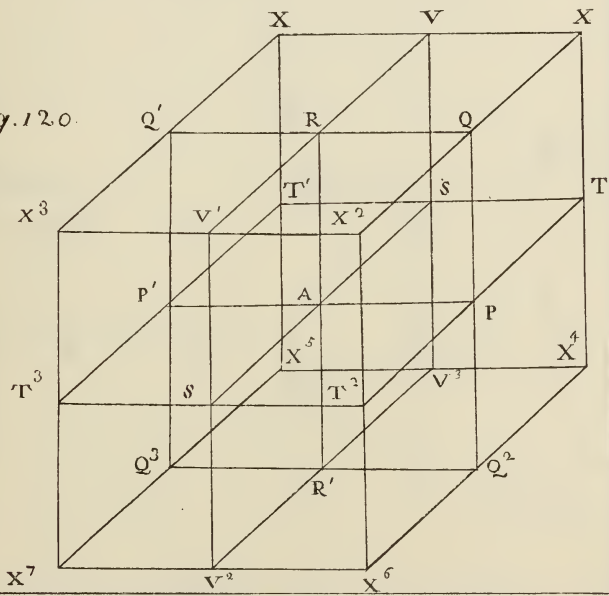


Fig. 121.

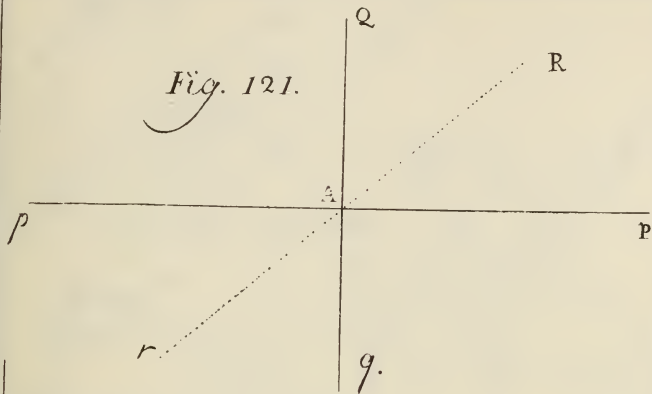


Fig. 122.

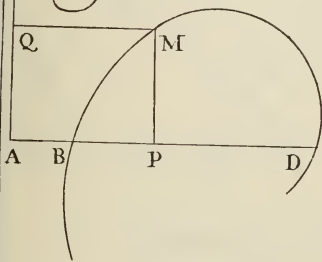
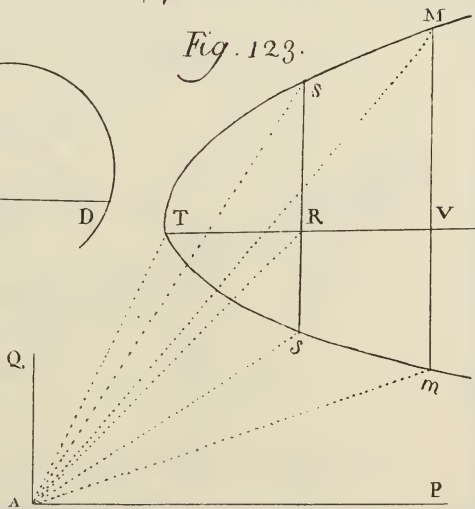


Fig. 123.



TAB. XXXII.

Fig 124.

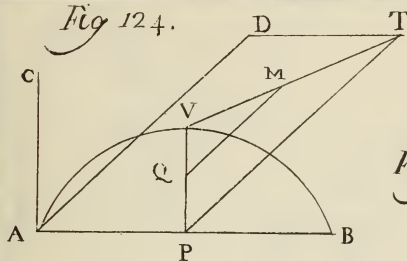


Fig. 125.

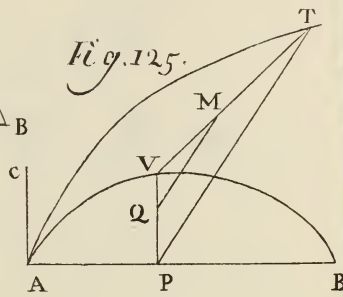


Fig. 126.

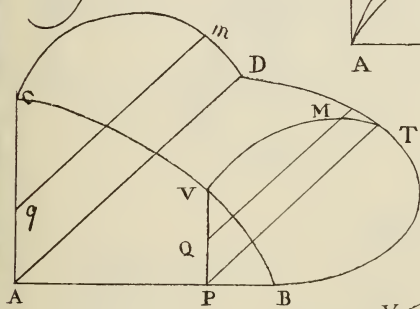


Fig 127.

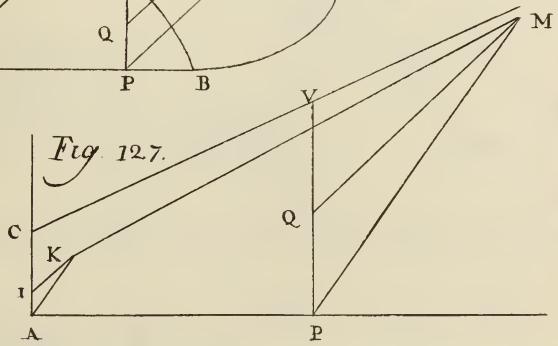


Fig. 128.

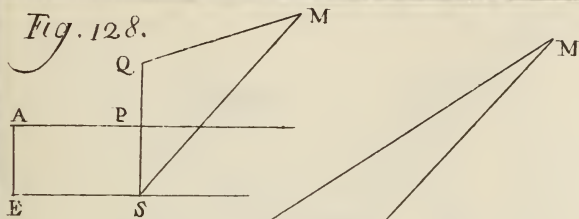


Fig. 129.

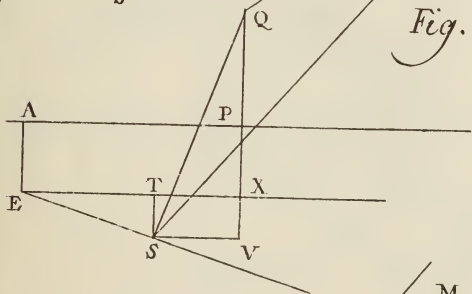


Fig. 130.

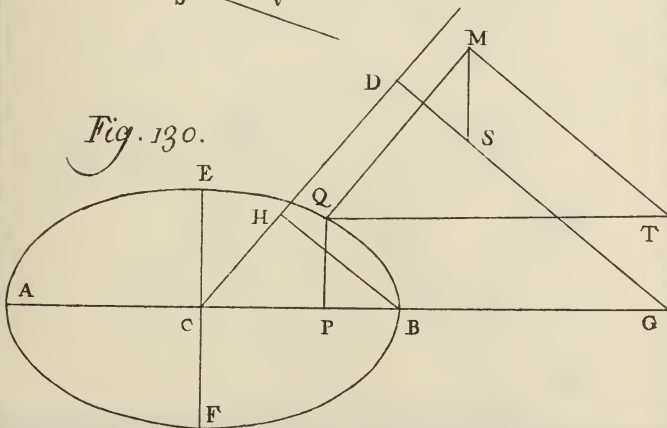


Fig. 131.

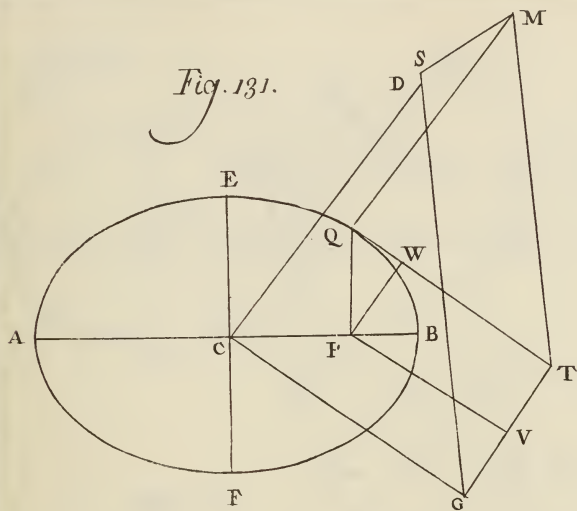


Fig. 132.

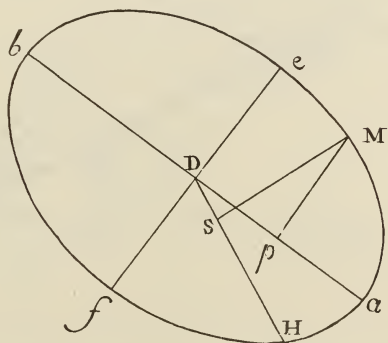


Fig. 133.

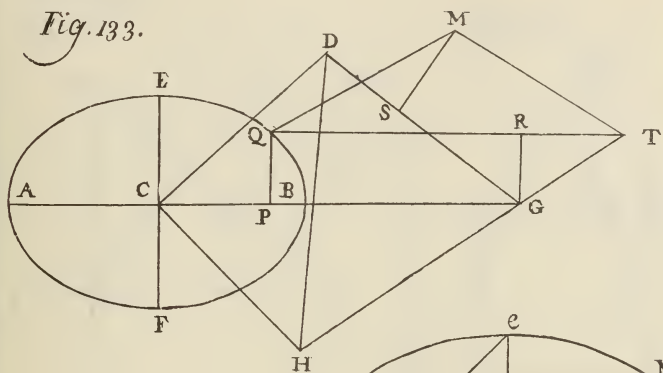


Fig. 134.

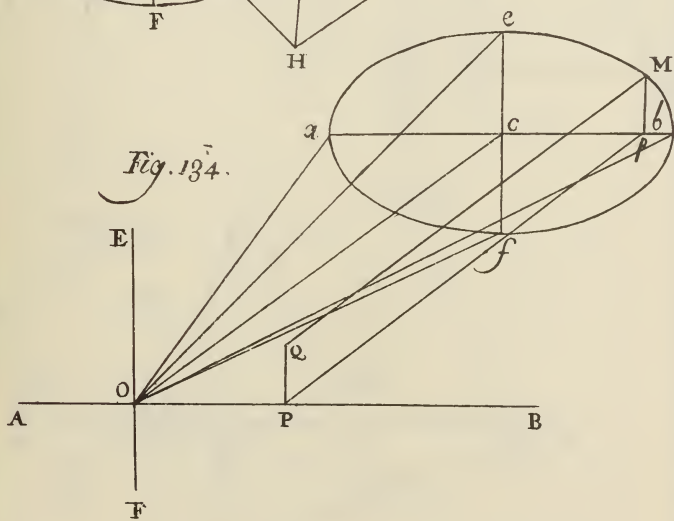


Fig. 135.

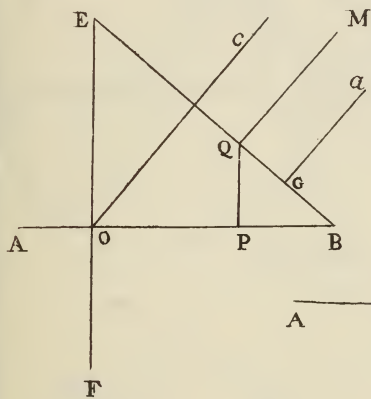


Fig. 136.

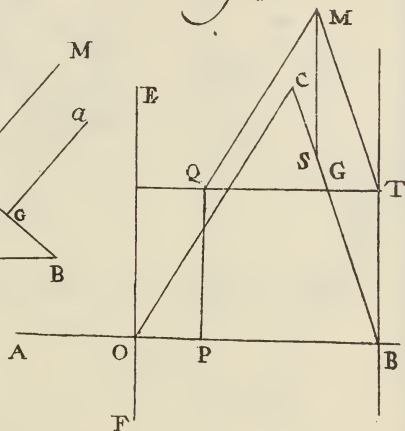


Fig. 137.

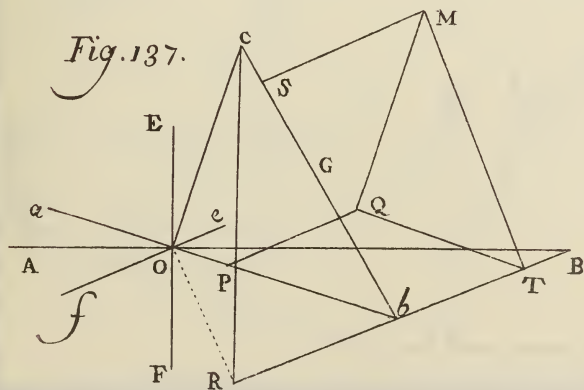


Fig. 138.

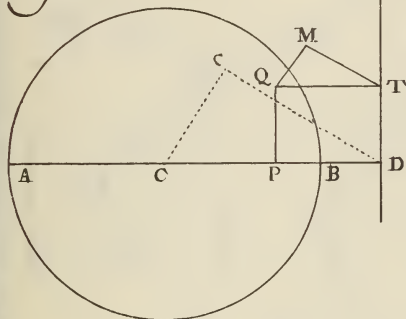


Fig. 139.

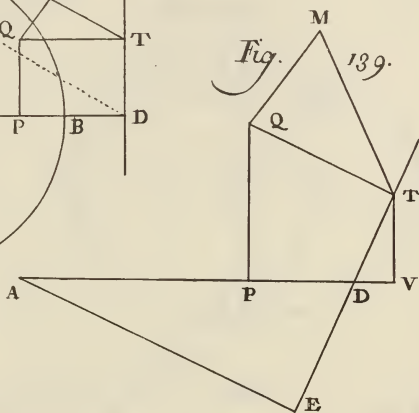


Fig. 140.

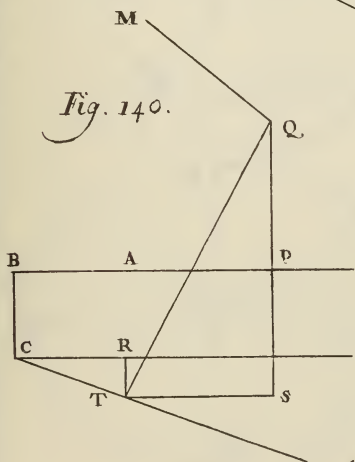


Fig. 141.

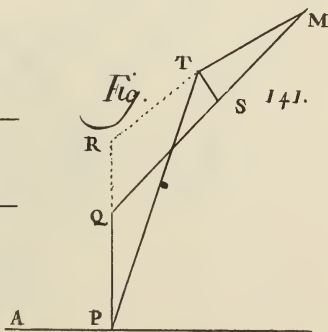


Fig. 142.

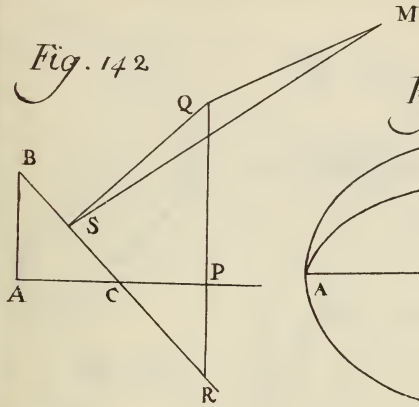
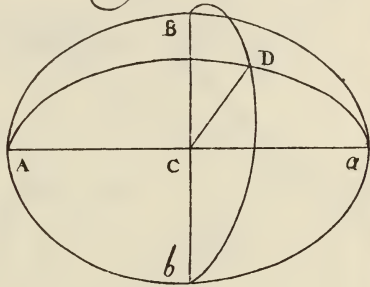
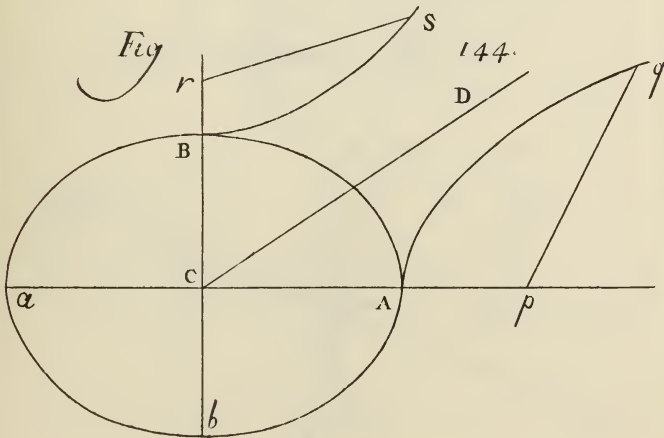
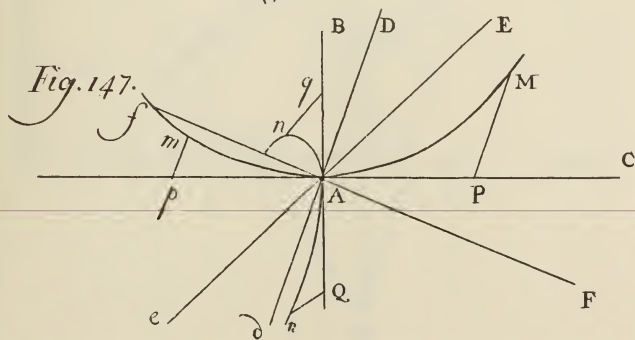
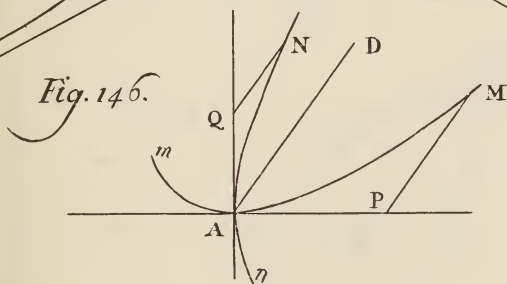
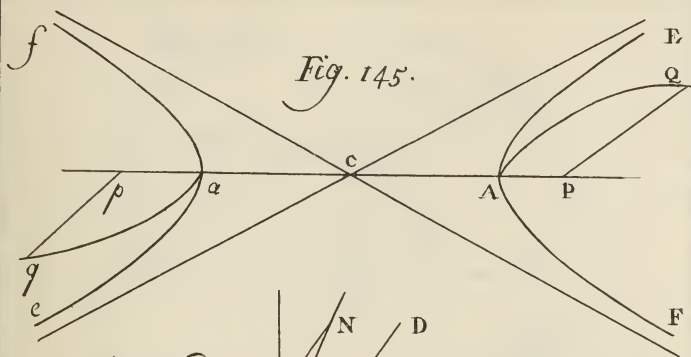


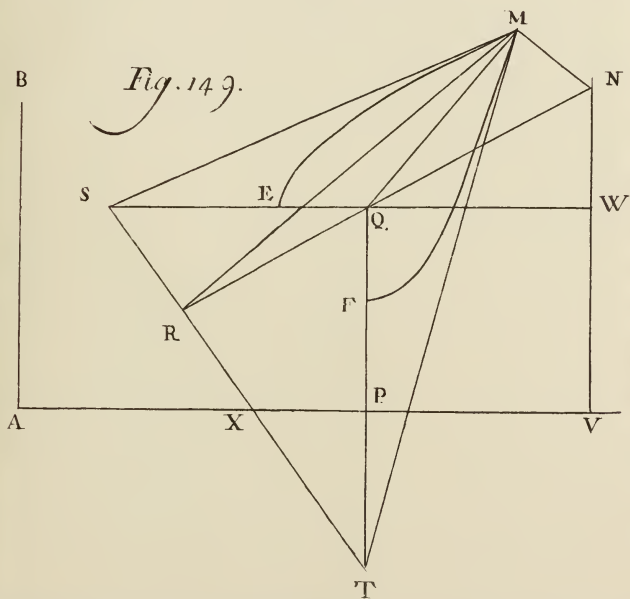
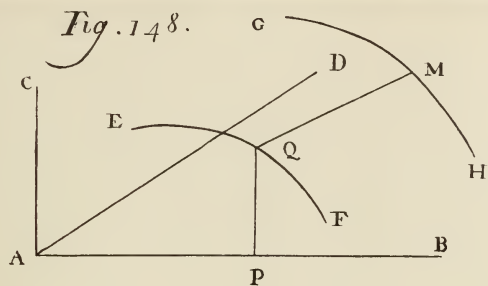
Fig. 143.



Fig







Date Due

STEACIE MAR 8 1973 *RL*

YORK MAR 14 1972

237059

